4. Numere raționale pozitive

4.1. Determinarea unei fracții folosind divizibilitatea în mulțimea numerelor naturale

Amintim rezultatele teoretice care vor fi necesare în rezolvarea problemelor prezentate la această temă:

• O pereche de numere naturale a şi b, cu $b \neq 0$, scrisă sub forma $\frac{a}{b}$ se numeşte fracție.

Orice fracție reprezintă un număr, care se numeşte număr fracționar. Vom folosi cuvântul "fracție" şi pentru a desemna un număr.

• Fracțiile se clasifică astfel: subunitare $(a < b)$, echiunitare $(a = b)$ şi supraunitare $(a > b)$.

• Două fracții $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ sunt echivalente şi scriem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dacă $a \cdot d = b \cdot c$ ($a, b, c, d \in N$, $b, d \neq 0$).

• A amplifica o fracție cu un număr diferit de 0 înseamnă a înmulți atât numărătorul cât şi numitorul cu acel număr.

• A simplifica o fracție cu un număr diferit de 0 înseamnă a împărți atât numărătorul cât şi numitorul cu acel număr.

• Prin amplificarea şi simplificarea unei fracții cu un număr se obține o fracție echivalentă cu fracția dată.

• O fracție $\frac{a}{b}$ se numeşte ireductibilă, dacă $c.m.m.d.c.(a,b) = 1$.

Vom prezenta câteva probleme care se rezolvă folosind divizibilitatea în mulțimea numerelor naturale legate de clasificarea fracțiilor:

Model 1. Să se afle x şi y numere naturale astfel încât:

a) fracția $\frac{6}{(x+1)(y-2)}$ să fie echiunitară

b) fracția $\frac{4}{(x-1)(y-2)}$ să fie supraunitară

c) fracția $\frac{(x+1)(y-2)}{3}$ să fie subunitară.

Soluție. a) O fracție $\frac{a}{b}$ este echiunitară dacă $a = b$; deci fracția este echiunitară dacă $(x+1)(y-2) = 6$. Rezultă că $x+1$ şi $y-2$ sunt divizori naturali ai lui 6, deci avem următoarele posibilități:

$x+1=1, y-2=6$, de unde $x=0$ şi $y=8$

$x+1=2, y-2=3$, de unde $x=1$ şi $y=5$
$x+1=3, y-2=2$, de unde $x=2$ şi $y=4$
$x+1=6, y-2=1$, de unde $x=5$ şi $y=3$

b) Fracția $\frac{a}{b}$ este supraunitară dacă $a>b$, deci valorile posibile ale produsului $(x-1)(y-2)$ sunt 1, 2 şi 3. Avem următoarele situații:
$x-1=1, y-2=1$, de unde $x=2$ şi $y=3$
$x-1=1, y-2=2$, de unde $x=2$ şi $y=4$
$x-1=2, y-2=1$, de unde $x=3$ şi $y=3$
$x-1=1, y-2=3$, de unde $x=2$ şi $y=5$
$x-1=3, y-2=1$, de unde $x=4$ şi $y=3$.

c) Fracția $\frac{a}{b}$ este subunitară dacă $a<b$, deci valorile posibile ale produsului $(x+1)(y-2)$ sunt 0, 1 şi 2. Avem următoarele situații:
$x+1=1, y-2=1$, de unde $x=0$ şi $y=3$
$x+1=1, y-2=2$, de unde $x=0$ şi $y=4$
$x+1=2, y-2=1$, de unde $x=1$ şi $y=3$
$y-2=0, x+1$ orice număr natural, de unde $y=2, x\in\mathbf{N}$
$x+1$ nu poate fi 0 pentru $x\in\mathbf{N}$.

Alt tip de probleme care se rezolvă folosind divizibilitatea în mulțimea numerelor naturale sunt legate de simplificarea fracțiilor:

Model 2. Arătați că următoarele fracții se pot simplifica:

a) $\frac{n^2+n}{2n+4}\ (n\in\mathbf{N})$

b) $\frac{10^n-1}{18}\ (n\in\mathbf{N})$

c) $\frac{123412341234}{876587658765}$

d) $\frac{3^1+3^3+3^5+...+3^{155}}{91}$

e) $\frac{9^{40}-7^{40}}{30}$

f) $\frac{2^{n+1}\cdot 3^n+2^n\cdot 3^{n+1}+6^{n+1}}{2^{n+2}\cdot 3^{n+2}+5\cdot 6^{n+1}}\ (n\in\mathbf{N})$

Soluție. a) Numărătorul se poate scrie $n(n+1)$. Produsul a două numere naturale consecutive este par. Numitorul se scrie $2(n+2)$, deci este divizibil cu 2. Fracția se poate simplifica cu 2.

b) Se observă că $10^n - 1 = 1\underbrace{0...0}_{n\ cifre} - 1 = \underbrace{99...9}_{n\ cifre}$, pentru $n \geq 1$, iar pentru $n = 0$, $10^n - 1 = 0$, deci numărătorul se divide cu 9 pentru orice $n \in \mathbf{N}$; fracția se simplifică cu 9.

c) Numărătorul se divide cu 1234, iar numitorul se divide cu 8765; obținem $\frac{1234 \cdot 100010001}{8765 \cdot 100010001}$, deci fracția se poate simplifica cu 100010001.

d) Suma de la numărător are (155-1):2+1 termeni, adică 78 termeni; 78 se divide cu 3, deci se pot face grupe de câte 3 termeni, deoarece $3+3^3+3^5=273=3\cdot7\cdot13$, iar $91=7\cdot13$. Numărătorul se scrie:

$(3^1 + 3^3 + 3^5) + (3^7 + 3^9 + 3^{11}) + ... + (3^{151} + 3^{153} + 3^{155}) =$

$= 273 + 3^6(3^1 + 3^3 + 3^5) + ... + 3^{150}(3 + 3^3 + 3^5) =$

$= 3 \cdot 7 \cdot 13(1 + 3^6 + ... + 3^{150})$. Fracția se simplifică cu $7\cdot13$.

e) Se stabilește ultima cifră a numărului $9^{40} - 7^{40}$: $u(9^{40}) = 1$ și $u(7^{40}) = u(7^{4\cdot10}) = 1$, deci $u(9^{40} - 7^{40}) = 0$, numărătorul se divide cu 10, deci fracția se poate simplifica cu 10.

f) Se poate scrie $\frac{2^n \cdot 2 \cdot 3^n + 2^n \cdot 3^n \cdot 3 + 2^n \cdot 3^n \cdot 6}{2^n \cdot 2^2 \cdot 3^n \cdot 3^2 + 5 \cdot 2^n \cdot 3^n \cdot 6}$ și în continuare

$\frac{2^n \cdot 3^n \cdot (2+3+6)}{2^n \cdot 3^n (4 \cdot 9 + 5 \cdot 6)}$, adică $\frac{2^n \cdot 3^n \cdot 11}{2^n \cdot 3^n \cdot 66}$, fracția se poate simplifica cu $2^n \cdot 3^n \cdot 11$.

Probleme rezolvate

R4.1.1. Determinați cea mai mică și cea mai mare fracție de forma $\frac{\overline{1x3y}}{\overline{6ab4}}$ care se poate simplifica cu 36.

Soluție. Trebuie să se determine numerele de forma $\overline{1x3y}$ și $\overline{6ab4}$ divizibile cu 36; 36=4·9, 4 și 9 sunt prime între ele. Avem $\overline{1x3y} \vdots 4$ și $\overline{1x3y} \vdots 9$; numerele care îndeplinesc condițiile sunt 1332 și 1836. Iar, la numitor $\overline{6ab4} \vdots 4$ și $\overline{6ab4} \vdots 9$. Numerele care îndeplinesc condițiile sunt 6804, 6624, 6444, 6264, 6084 și 6984.

Cea mai mică fracție care îndeplinește condiția cerută este $\frac{1332}{6984}$, iar cea mai mare fracție este $\frac{1836}{6084}$.

R4.1.2. Să se arate că fracția:

$$\frac{2^{2n+6}\cdot 5^{2n+1}\cdot 7^n+28^{n+1}\cdot 5^{2n+2}+4^{n+1}\cdot 5^{2n+1}\cdot 7^{n+2}}{3^n\cdot 7^{n+2}\cdot 11^{n+1}+21^{n+1}\cdot 11^{n+2}-40\cdot 3^{n+3}\cdot 77^n}$$

se poate simplifica cu 2000 pentru orice $n\in\mathbf{N}$.

Soluție. Pe baza proprietăților operațiilor cu puteri, avem:

$$\frac{2^{2n}\cdot 5^{2n}\cdot 7^n\cdot(2^6\cdot 5+2^2\cdot 7\cdot 5^2+2^2\cdot 5\cdot 7)}{3^n\cdot 7^n\cdot 11^n\cdot(7^2\cdot 11+3\cdot 7\cdot 11^2-40\cdot 3^3)},$$

de unde rezultă în urma efectuării calculelor fracția $\frac{2^{2n}\cdot 5^{2n}\cdot 2000}{3^n\cdot 11^n\cdot 2000}$, deci fracția se poate simplifica cu 2000.

R4.1.3. a) Să se efectueze

$$\frac{3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7+3^8+3^9+3^{10}}{3+3^3+3^5+3^7+3^9}$$

b) Dacă $A=3+3^2+3^3+...+3^{100}$, să se arate că A se divide cu 12 şi că $\frac{A}{3+3^3+3^5+...+3^{97}+3^{99}}\in\mathbf{N}$.

Soluție. a) Pentru a simplifica fracția se grupează termenii de la numărător câte 5: $(3+3^3+3^5+3^7+3^9)+(3^2+3^4+3^6+3^8+3^{10})$, de unde rezultă $(3+3^3+3^5+3^7+3^9)(1+3)$, deci numărătorul este egal cu $(3+3^3+3^5+3^7+3^9)\cdot 4$. După simplificare se obține 4.

b) Se observă că $3+3^2=12$, deci cei 100 termeni ai lui A se grupează câte 2 şi se obține $A=12(1+3^2+3^4+...+3^{98})$, deci A se divide cu 12. Pentru a simplifica fracția se grupează termenii de la numărător câte 2:

$(3+3^2)+(3^3+3^4)+(3^5+3^6)+...+(3^{99}+3^{100})$, de unde rezultă

$3(1+3)+3^2(1+3)+3^5(1+3)+...+3^{99}(1+3)$ sau $4(3+3^3+3^5+...+3^{99})$.

Fracția se simplifică cu $3+3^3+3^5+...+3^{99}$. După simplificare se obține 4.

R4.1.4. Să se determine numerele naturale n pentru care următoarele fracții să fie numere naturale:

a) $\frac{15}{2n-1}$; b) $\frac{n+5}{n+1}$; c) $\frac{3n+14}{n-2}$; d) $\frac{2n+3}{3n+2}$.

Soluție. a) Fracția $\frac{15}{2n-1}$ este număr natural dacă $2n-1$ este divizor natural al lui 15, adică $2n-1\in\{1,3,5,15\}$, de unde se obține $n\in\{1,2,3,8\}$.

b) Fracția $\frac{n+5}{n+1}$ se poate scrie $\frac{n+1+4}{n+1}$, adică $1+\frac{4}{n+1}$. Problema se reduce la $n+1$ este divizor natural al lui 4, deci $n+1\in\{1,2,4\}$, de unde $n\in\{0,1,3\}$.

c) Fracția $\frac{3n+14}{n-2}$ se poate scrie $\frac{3n-6+20}{n-2}$, adică $3+\frac{20}{n-2}$. Problema se reduce la $n-2$ este divizor natural al lui 20, deci $n-2 \in \{1,2,4,5,10,20\}$, de unde $n \in \{3,4,6,7,12,22\}$.

d) Dacă $\frac{2n+3}{3n+2}$ este număr natural, atunci şi $3 \cdot \frac{2n+3}{3n+2}$ este natural. Avem $\frac{6n+9}{3n+2} = \frac{6n+4+5}{3n+2} = 2 + \frac{5}{3n+2}$ este natural când $3n+2 \in \{1,5\}$, adică pentru $n=1$.

R4.1.5. Să se determine numerele naturale *p* şi *q* astfel încât

$$\frac{5^{p+1}+3}{5^q-5^p} = 2.$$

Soluție. Egalitatea din enunț se mai poate scrie $5^{p+1}+3 = 2(5^q-5^p)$. Toate puterile cu exponent natural nenul ale lui 5 au ultima cifră 5, $p+1 \neq 0$, deci $5^{p+1}+3$ are ultima cifră 8. Rezultă că ultima cifră a numărului $2(5^q-5^p)$ este 8 şi ținând cont de relația dată, $p=0$ şi $q=1$.

R4.1.6. Să se determine perechile de numere naturale (x, y), care verifică egalitatea:

$$xy + y - 3x = 11.$$

Soluție. Egalitatea dată se poate scrie $y(x+1) = 3x+11$, de unde $y = \frac{3x+11}{x+1}$ sau $y = 3 + \frac{8}{x+1}$. Pentru ca *y* să fie număr natural, avem $x+1 \in D_8$, de unde $x \in \{0,1,3,7\}$. Se deduce soluția problemei: (0,11), (1,7), (3,5), (7,4).

4.2. Fracții reductibile şi fracții ireductibile

O fracție $\frac{a}{b}$, *a, b* numere naturale, $b \neq 0$ este ireductibilă dacă şi *a* şi *b* sunt prime între ele.

O fracție care nu este ireductibilă, deci care se poate simplifica cu un număr natural diferit de 0, se spune că este reductibilă (sau simplificabilă).

Model. a) Să se arate că fracția $\frac{3n+2}{5n+3}$ este ireductibilă pentru orice *n* număr natural.

b) Să se arate că fracția $\frac{(n^2+n)(n+2)}{9}$ este reductibilă pentru orice *n* număr natural.

Soluție. a) Fie d c.m.m.d.c. al numerelor $3n+2$ şi $5n+3$, deci $(3n+2)\vdots d$ şi $(5n+3)\vdots d$. Conform proprietăților divizibilității numerelor naturale $5(3n+2)\vdots d$ şi $3(5n+3)\vdots d$, ceea ce este echivalent cu $(15n+10)\vdots d$ şi $(15n+9)\vdots d$; atunci d divide diferența lor, prin urmare $1\vdots d$ şi cum 1 are divizor numai pe 1, rezultă $d=1$. Ştim că d este c.m.m.d.c. al numărătorului şi numitorului, atunci acestea sunt prime între ele şi fracția este ireductibilă.

b) Numărătorul se scrie $n(n+1)(n+2)$. Produsul a trei numere naturale consecutive se divide cu 6, deci fracția se poate simplifica cu 3.

Probleme rezolvate

R4.2.1. Să se arate că fracția $\dfrac{2^{2001}\cdot n+2^{2000}+2^{1999}+...+2^2+2+1}{2^{2000}\cdot n+2^{1999}+2^{1998}+...+2^2+2+1}$ este ireductibilă, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$.

Soluție. Fie d c.m.m.d.c. al numărătorului şi numitorului, deci

$$(2^{2001}\cdot n+2^{2000}+2^{1999}+...+2^2+2+1)\vdots d \text{ şi}$$
$$(2^{2000}\cdot n+2^{1999}+2^{1998}+...+2^2+2+1)\vdots d.$$

Atunci ținând cont de proprietățile divizibilității:

$$(2^{2001}\cdot n+2^{2000}+2^{1999}+...+2^2+2+1)\vdots d \text{ şi}$$
$$2(2^{2000}\cdot n+2^{1999}+2^{1998}+...+2^2+2+1)\vdots d,$$

de unde avem mai departe:

$$(2^{2001}\cdot n+2^{2000}+2^{1999}+...+2^2+2+1)\vdots d \text{ şi}$$
$$(2^{2001}\cdot n+2^{2000}+2^{1999}+...+2^3+2^2+2)\vdots d,$$

atunci şi diferența lor se divide cu d, deci $1\vdots d$, rezultă că $d=1$. C.m.m.d.c. al numărătorului şi numitorului este 1, deci sunt prime între ele, fracția este ireductibilă.

R4.2.2. Arătați că fracția:

$$\frac{3\cdot5\cdot7+3\cdot10\cdot14+3\cdot15\cdot21+...+3\cdot125\cdot175}{2\cdot4\cdot6+2\cdot8\cdot12+2\cdot12\cdot18+...+2\cdot100\cdot150}$$

este reductibilă.

Soluție. Fracția se poate scrie: $\dfrac{3\cdot5\cdot7\cdot(1+2\cdot2+3\cdot3+...+25\cdot25)}{2\cdot4\cdot6\cdot(1+2\cdot2+3\cdot3+...+25\cdot25)}$, deci fracția se poate simplifica cu $1+2^2+3^2+...+25^2$.

R4.2.3. Să se arate că fracția $\dfrac{7n+9}{(3n+4)(4n+5)}$ este ireductibilă, pentru orice număr natural n.

Soluție. Se arată că $3n+4$ şi $4n+5$ sunt prime între ele; fie d c.m.m.d.c. al numerelor $3n+4$ şi $4n+5$, deci $(3n+4)\vdots d$ şi $(4n+5)\vdots d$, de unde $4(3n+4)\vdots d$ şi

$3(4n+5)\vdots d$, deci $[4(3n+4)-3(4n+5)]\vdots d$, adică $1\vdots d$, de unde $d=1$. C.m.m.d.c. al lui $3n+4$ şi $4n+5$ este 1, deci ele sunt prime între ele. De aici rezultă că $3n+4+4n+5$, adică $7n+9$ şi $(3n+4)(4n+5)$ sunt prime între ele, deci fracţia $\dfrac{7n+9}{(3n+4)(4n+5)}$ este ireductibilă.

R4.2.4. Aflaţi numerele naturale *n* pentru care fracţia $\dfrac{3n+5}{2n+7}$ este reductibilă, apoi calculaţi suma primelor 2001 de numere astfel obţinute, considerate în ordine crescătoare.

Soluţie. Fie *d* c.m.m.d.c. al numerelor $3n+5$ şi $2n+7$, deci $(3n+5)\vdots d$ şi $(2n+7)\vdots d$, de unde $2(3n+5)\vdots d$ şi $3(2n+7)\vdots d$, deci şi diferenţa lor se divide cu *d*, $[(6n+21)-(6n+10)]\vdots d$, adică $11\vdots d$, rezultă că $d=11$ (se cere ca fracţia să fie reductibilă). Se poate scrie $3n+5=11p$ şi $2n+7=11q$, $p\in\mathbf{N}$, $q\in\mathbf{N}^*$, deci $n-2=11(p-q)$ sau $n-2=11k$, $k\in\mathbf{N}$, de unde $n=11k+2$.

Numerele naturale pentru care fracţia dată este reductibilă sunt de forma $n=11k+2$, $k\in\mathbf{N}$. Se cere suma primelor 2001 numere; avem

$$(11\cdot 0+2)+(11\cdot 1+2)+(11\cdot 2+2)+...+(11\cdot 2000+2)=$$

$$=11\cdot(1+2+...+2000)+2\cdot 2001=11\cdot\frac{2000\cdot 2001}{2}+4002=$$

$$=11\cdot 1000\cdot 2001+4002=22015002.$$

R4.2.5. Să se arate că dacă suma a două fracţii ireductibile este un număr natural, atunci cele două fracţii au acelaşi numitor.

Soluţie. Fie $\dfrac{a}{b}$ şi $\dfrac{c}{d}$ cele două fracţii ireductibile, unde $(a,b)=1$ şi $(c,d)=1$. Se dă $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=n$, $n\in\mathbf{N}$, de unde $ad+bc=nbd$ (1).

Din (1) rezultă că $bc=d(nb-a)$, de unde $(bc)\vdots d$, dar $(c,d)=1$, deci $b\vdots d$ (2).

Din (1) rezultă că $ad=b(nd-c)$, de unde $(ad)\vdots b$, dar $(a,b)=1$, deci $d\vdots b$ (3).

Din (2) şi (3) rezultă că $b=d$.

R4.2.6. Fie $A=\{1^{2002},2^{2002},3^{2002},4^{2002},5^{2002}\}$. Să se arate că oricare ar fi $x\in A$, există $y,z\in A$, $x\neq y\neq z\neq x$, astfel încât fracţia $\dfrac{x+y}{x+z}$ să fie reductibilă.

Soluţie. Dacă $x=1^{2002}$ luăm $y=2^{2002}$ şi $z=3^{2002}$, atunci $u(1^{2002}+2^{2002})=5$ şi $u(1^{2002}+3^{2002})=0$, deci $\dfrac{x+y}{x+z}$ se simplifică cu 5.

Dacă $x=2^{2002}$ luăm $y=1^{2002}$ şi $z=4^{2002}$, atunci $u(x+y)=5$ şi $u(x+z)=0$, deci $\dfrac{x+y}{x+z}$ se simplifică cu 5.

Dacă $x=3^{2002}$ luăm $y=1^{2002}$ şi $z=4^{2002}$, atunci $u(x+y)=0$ şi $u(x+z)=5$, deci $\dfrac{x+y}{x+z}$ se simplifică cu 5.

Dacă $x=4^{2002}$ luăm $y=2^{2002}$ şi $z=3^{2002}$, atunci $u(x+y)=0$ şi $u(x+z)=5$, deci $\dfrac{x+y}{x+z}$ se simplifică cu 5.

Dacă $x=5^{2002}$ luăm $y=1^{2002}$ şi $z=3^{2002}$, atunci $u(x+y)=6$ şi $u(x+z)=4$, deci $\dfrac{x+y}{x+z}$ se simplifică cu 2.

4.3. Calculul unor sume

În programa şcolară se învaţă adunarea numerelor fracţionare (sau a numerelor raţionale). În acest paragraf se va prezenta calculul unor sume finite care nu va fi făcut respectând algoritmul obişnuit de la orele de clasă.

Model. Să se calculeze $S=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{98\cdot 99}+\dfrac{1}{99\cdot 100}$.

Soluţie. Pentru a calcula această sumă trebuie să folosim următoarea remarcă: $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, $n\in\mathbf{N}^*$. Suma dată se scrie

$$S=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right),$$

iar după efectuarea calculelor: $S=1-\dfrac{1}{100}$, adică $S=\dfrac{99}{100}$.

Generalizare. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{(n-2)(n-1)}+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}=1-\dfrac{1}{n}$

de unde se poate deduce că rezultatul unei astfel de sume este întotdeauna un număr subunitar.

Observaţie. Se poate aplica rezultatul obţinut mai sus pentru calculul următoarelor sume:

$$S_1=\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+...+\frac{1}{19\cdot 20}=\frac{1}{4}-\frac{1}{20}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

$$S_2=\frac{1}{10\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 13}+...+\frac{1}{49\cdot 50}=\frac{1}{10}-\frac{1}{50}=\frac{4}{50}=\frac{2}{25}$$

$$S_3 = \frac{5}{20\cdot 21} + \frac{5}{21\cdot 22} + \frac{5}{22\cdot 23} + \ldots + \frac{5}{59\cdot 60} =$$
$$= 5\cdot\left(\frac{1}{20\cdot 21} + \frac{1}{21\cdot 22} + \frac{1}{22\cdot 23} + \ldots + \frac{1}{59\cdot 60}\right) =$$
$$= 5\cdot\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{60}\right) = 5\cdot\frac{2}{60} = \frac{1}{6}$$

Remarcă. Dacă numitorul fracției nu este produsul a două numere naturale consecutive, pentru a calcula suma trebuie să ştim că:

$$\frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}; \quad n, k \in \mathbf{N}^*$$

Vom folosi această remarcă pentru a calcula suma

$$S = \frac{5}{1\cdot 6} + \frac{5}{6\cdot 11} + \frac{5}{11\cdot 16} + \ldots + \frac{5}{101\cdot 106}.$$

Suma devine:

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{16}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{101} - \frac{1}{106}\right),$$

iar după efectuarea calculelor: $S = 1 - \frac{1}{106}$, adică $S = \frac{105}{106}$.

Observații. Să se calculeze

$$S = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{28\cdot 31}.$$

În acest caz nu putem aplica nici una din formulele de mai sus, pentru că la numărător nu este diferența celor doi factori de la numitorul fracției. Atunci vom calcula

$$3\cdot S = \frac{3}{1\cdot 4} + \frac{3}{4\cdot 7} + \frac{3}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{3}{28\cdot 31},$$

folosind formula $\frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}; \quad n, k \in \mathbf{N}^*$ şi vom avea:

$$3\cdot S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{28} - \frac{1}{31}\right),$$

adică $3\cdot S = 1 - \frac{1}{31}$, deci $3\cdot S = \frac{30}{31}$ şi de aici deducem $S = \frac{10}{31}$.

Probleme rezolvate

R4.3.1. Să se calculeze suma:

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+3+\ldots 1998}$$

Soluție. Calculăm sumele de la numitori, folosind:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2},\ n\in\mathbf{N}.$$

Vom avea mai departe:

$$S=\frac{1}{1}+\frac{1}{\frac{2\cdot 3}{2}}+\frac{1}{\frac{3\cdot 4}{2}}+...+\frac{1}{\frac{1998\cdot 1999}{2}},$$

efectuând obținem:

$$S=\frac{1}{1}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+...+\frac{2}{1998\cdot 1999},$$

adică

$$S=2\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{1998\cdot 1999}\right),$$

deci $S=2\cdot\left(1-\frac{1}{1999}\right)$ rezultă $S=2\cdot\frac{1998}{1999}$, $S=\frac{3996}{1999}$.

R4.3.2. Să se compare:

$$a=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{1997\cdot 1999} \quad \text{și} \quad b=1-\frac{1000}{1999}.$$

Soluție. Calculăm $2\cdot a=\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+...+\frac{2}{1997\cdot 1999}$, adică $2\cdot a=1-\frac{1}{1999}$ sau $2\cdot a=\frac{1998}{1999}$, de unde $a=\frac{999}{1999}$. Efectuând diferența, rezultă că $b=\frac{999}{1999}$. Rezultă că $a=b$.

R4.3.3. Să se calculeze suma:

$$S=\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 7}+...+\frac{1}{1999\cdot 2002}+\frac{1}{2000\cdot 2003}$$

Soluție. Avem

$$3\cdot S=\frac{3}{2\cdot 5}+\frac{3}{3\cdot 6}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{5\cdot 8}+...+\frac{3}{1998\cdot 2001}+\frac{3}{1999\cdot 2002}+\frac{3}{2000\cdot 2003},$$

adică

$$3\cdot S=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+...+\left(\frac{1}{1998}-\frac{1}{2001}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{1999}-\frac{1}{2002}\right)+\left(\frac{1}{2000}-\frac{1}{2003}\right),$$

iar după efectuarea calculelor rezultă că

$$3\cdot S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2001}+\frac{1}{2002}+\frac{1}{2003}\right),$$

de unde

$$S=\frac{13}{36}-\left(\frac{1}{2001}+\frac{1}{2002}+\frac{1}{2003}\right)\cdot\frac{1}{3}.$$

R4.3.4. Să se demonstreze că:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n},\quad n\in\mathbf{N}^*.$$

Remarcă. Această egalitate poartă numele de "Identitatea lui Botez-Catalan".

Soluție. Se poate scrie că

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-$$
$$-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

După efectuarea calculelor obținem:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-$$
$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right),$$

adică:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

R4.3.5. Să se calculeze următoarele sume:

$$S_1=\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{2}{3\cdot4\cdot5}+\frac{2}{4\cdot5\cdot6}+\ldots+\frac{2}{8\cdot9\cdot10}\quad \text{şi}$$
$$S_2=\frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{3}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{3}{7\cdot8\cdot9\cdot10}$$

Soluție. Suma S_1 se poate scrie:

$$S_1=\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}\right)+\left(\frac{1}{4\cdot5}-\frac{1}{5\cdot6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{8\cdot9}-\frac{1}{9\cdot10}\right),$$

iar după efectuarea calculelor devine: $S_1=\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{9\cdot10}$, adică $S_1=\frac{1}{6}-\frac{1}{90}$, deci $S_1=\frac{14}{90}$ sau $S_1=\frac{7}{45}$.

Suma S_2 se poate scrie:

$$S_2=\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{2\cdot3\cdot4}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{3\cdot4\cdot5}\right)+...+\left(\frac{1}{7\cdot8\cdot9}-\frac{1}{8\cdot9\cdot10}\right),$$

iar după efectuarea calculelor: $S_2=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{8\cdot9\cdot10}$, adică $S_2=\frac{1}{6}-\frac{1}{720}$, deci $S_2=\frac{119}{720}$.

Remarcă. O altă categorie de exerciții de calcul al unor sume ce apar la concursuri şi olimpiade se bazează pe reguli de calcul cu puteri în mulțimea numerelor naturale. Aceste exerciții sunt de felul următor:

Să se calculeze:

a) $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}$, $n\in\mathbf{N}^*$

b) $B=\frac{n-1}{n}+\frac{n-1}{n^2}+\frac{n-1}{n^3}+...+\frac{n-1}{n^{10}}$, $n\in\mathbf{N}^*$

c) $C=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-...-\frac{1}{2^n}$, $n\in\mathbf{N}^*$

d) $D=\frac{1}{n}-\frac{n-1}{n^2}-...-\frac{n-1}{n^{10}}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

Soluție. a) Se aduc fracțiile la acelaşi numitor şi vom avea

$$A=\frac{2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+...+2+1}{2^n}\ \text{ sau }\ A=\frac{2^n-1}{2^n},$$

ținând cont că $1+a+a^2+...+a^{n-1}+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ (din Capitolul 1, tema 1.4) ($a\in\mathbf{N}^*$, $n\in\mathbf{N}^*$), suma puterilor consecutive ale unui număr natural.

b) Pentru calculul lui B folosim din nou scrierea fiecărui termen ca diferență şi vom avea:

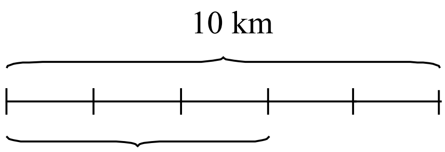
$$B=\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)+...+\left(\frac{1}{n^8}-\frac{1}{n^9}\right)+\left(\frac{1}{n^9}-\frac{1}{n^{10}}\right),$$

iar după efectuarea calculelor $B=1-\frac{1}{n^{10}}$ sau $B=\frac{n^{10}-1}{n^{10}}$.

4.4. Aflarea unei fracții dintr-un număr

Model. Mihai are de parcurs 30 km până la o cabană. El parcurge trei cincimi din distanță cu bicicleta şi restul drumului cu o maşină. Câți kilometri parcurge cu bicicleta?

Soluție. Pentru a înțelege mai bine, apelăm la un desen ajutător, unde am figurat drumul parcurs de Mihai şi observăm că:



$\frac{5}{5}$ din drum reprezintă 30 km

$\frac{1}{5}$ din drum reprezintă 30:5=6 km

$\frac{3}{5}$ din drum reprezintă 6·3=18 km

Deci, Mihai a parcurs cu bicicleta 18 km.

• Pentru a afla o fracție dintr-un număr înmulțim fracția cu acel număr.

$$\frac{a}{b} \text{ din } A \text{ înseamnă } \frac{a}{b} \cdot A$$

Remarcă. • Pentru a afla un număr când se ştie o fracție din el procedăm astfel:

$$\text{dacă } \frac{a}{b} \text{ din } x \text{ este } B, \text{ atunci } x = B : \frac{a}{b}$$

Probleme rezolvate

R4.4.1. Două robinete pot umple împreună un bazin în 16 ore. Dacă robinetele sunt deschise timp de 12 ore şi se opreşte primul atunci al doilea robinet va umple bazinul singur în 20 ore. În cât timp ar umple bazinul fiecare robinet dacă ar curge singur?

Soluție. Dacă cele două robinete pot umple împreună bazinul în 16 ore, atunci într-o oră, împreună, pot umple $\frac{1}{16}$ din bazin. Cele două robinete în 12 ore pot umple $\frac{12}{16}$ din bazin, adică $\frac{3}{4}$ din bazin. Restul, adică $\frac{1}{4}$ din bazin, va fi umplut de al doilea robinet singur în 20 ore, deci al doilea robinet curgând singur va umple bazinul într-un timp de 4 ori mai mare, deci în 80 ore.

Dacă împreună cele două robinete umplu într-o oră $\frac{1}{16}$ din bazin şi al doilea umple într-o oră $\frac{1}{80}$ din bazin, atunci primul robinet umple într-o oră $\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{80}\right)$ din bazin, adică $\frac{1}{20}$ din bazin. Atunci primul robinet va umple bazinul într-un timp de 20 de ori mai mare, adică în 20 de ore.

Răspuns: Primul robinet poate umple bazinul în 20 de ore, curgând singur, iar al doilea în 80 de ore.

R4.4.2. Două robinete R_1 şi R_2 umplu fiecare acelaşi bazin în n_1, respectiv n_2 ore. Să se afle numerele naturale n_1 şi n_2, ştiind că dacă ele curg împreună umplu bazinul în 12 ore.

Soluție. Robinetele R_1 și R_2 și $R_1 + R_2$ umplu într-o oră câte $\frac{1}{n_1}$, $\frac{1}{n_2}$ și $\frac{1}{n_1+n_2}$ din bazin şi avem de rezolvat ecuația:

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}=\frac{1}{12}$$

Evident $n_1 \geq 12$ şi $n_2 \geq 12$ şi notăm $n_1 = 12 + k_1$, $n_2 = 12 + k_2$. Avem

$$\frac{1}{12+k_1}+\frac{1}{12+k_2}=\frac{1}{12}.$$

Efectuând calculele obținem

$$12(12+k_2+12+k_1)=(12+k_1)(12+k_2),$$

de unde $k_1k_2 = 12^2 = 2^4 \cdot 3^2 = 144$. Numărul k_1 poate fi luat oricare din divizorii lui 14 în 5·3=15 moduri și k_2 este restul până ce produsul devine 144. Obținem pentru (R_1, R_2) posibilitățile (k_1, k_2) egale cu: (1,144), (2,72), (3,48), (4,36), (6,24), (8,18), (9,16), (12,12). Dacă nu contează numerotarea robinetelor obținem 8 soluții.

Observație. Dacă robinetele R_1 și R_2 umplu bazinul în n ore curgând împreună, numărul soluțiilor este numărul divizorilor lui n^2 ($k_1 \cdot k_2 = n^2$). Dacă $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ este descompunerea în factori primi a lui *n*, atunci numărul soluțiilor este $N = (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1)\ldots(2\alpha_k + 1)$ (impar), iar dacă nu contează numerotarea robinetelor el este $N' = \frac{N+1}{2}$.

R4.4.3. Un pescar a prins un peşte despre care spune: "Coada are 1 kg, capul cântăreşte cât coada şi jumătate din trunchi, iar trunchiul cât capul şi coada la un loc". Cât cântăreşte peştele?

Soluție. Dacă trunchiul cântăreşte cât capul şi coada, adică cât capul şi 1 kg, iar capul cântăreşte cât coada şi $\frac{1}{2}$ trunchi, rezultă că trunchiul cântăreşte cât $\frac{1}{2}$ trunchi şi

2 kg, deci $\frac{1}{2}$ trunchi reprezintă 2 kg, adică trunchiul are 4 kg, de unde capul cântăreşte 3 kg. Peştele cântăreşte 8 kg.

R4.4.4. Pe piatra funerară a lui Diofant*: "Trecătorule! Sub această piatră se odihnesc osemintele lui Diofant, care a murit de bătrâneţe. A şasea parte a vieţii lui a durat copilăria, a douăsprezecea adolescenţa, a şaptea tinereţea. După ce s-a scurs încă jumătate din viaţă s-a însurat, după 5 ani soţia i-a născut un băiat şi când fiul lui a împlinit 4 ani a murit." Câţi ani a trăit Diofant?

Soluţie. Se poate afla ce parte din viaţa lui Diofant reprezintă ultimii 9 ani trăiţi. Până înainte cu 9 ani de a muri a trăit $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right)$ din viaţă, adică $\frac{25}{28}$ din viaţă, deci 9 ani reprezintă $\frac{3}{28}$ din viaţă, de unde Diofant a trăit $9:\frac{3}{28}$, adică 84 de ani.

R4.4.5. Cât mai este până la satul următor? "Distanţa până la satul din care vii este o treime din distanţa de la el până la satul în care te duci, iar dacă mai mergi 2 km vei ajunge la jumătatea distanţei dintre ele". Cât i-a mai rămas de mers celui ce a întrebat?

Soluţie. Persoana a parcurs o treime din distanţa dintre cele două sate; 2 km reprezintă diferenţa dintre jumătate din această distanţă şi o treime din ea, adică 2 km reprezintă o şesime din distanţă, rezultă că distanţa dintre cele două sate este de 12 km. Persoana a parcurs 4 km, deci i-a mai rămas de mers 8 km.

R4.4.6. Doi vecini vor să cumpere o maşină cu 7200\$. "Dă-mi $\frac{1}{3}$ din banii tăi şi voi cumpăra eu maşina". "Mai bine dă-mi tu $\frac{3}{4}$ din banii tăi şi voi putea s-o cumpăr eu". Câţi bani are fiecare?

Soluţie. Dacă se notează x şi y sumele celor doi vecini, avem $x+\frac{1}{3}y=\frac{3}{4}x+y=7200$. Din prima egalitate rezultă că $\frac{1}{4}x=\frac{2}{3}y$, adică $x=\frac{8}{3}y$ şi înlocuind obţinem $\frac{8}{3}y+\frac{1}{3}y=7200$, de unde $y=2400$, iar $x=6400$. Primul vecin are 6400\$, iar al doilea 2400\$.

R4.4.7. (Newton) Iarba pe o păşune creşte uniform şi cu aceeaşi viteză. Se ştie că 70 de vaci consumă această iarbă în 24 de zile, iar 30 de vaci o consumă în 60 de zile. Câte vaci consumă această iarbă în 96 de zile?

---

* Diofant a fost învăţat grec din antichitate. În matematică numele lui e legat de anumite ecuaţii cu soluţii în mulţimea numerelor întregi, numite ecuaţii diofantice.

Soluție. O vacă consumă într-o zi o rație. În primul caz 70 de vaci consumă în 24 zile 1680 rații, iar în al doilea caz 30 de vaci consumă în 60 zile 1800 rații. O parte din iarbă creşte în perioada păşunatului:
1800-1680=120 de rații. 120 de rații reprezintă cantitatea de iarbă care a crescut în 60-24=36 zile. Iarba creşte în medie $\frac{120}{36}=\frac{10}{3}$ rații pe zi.

Atunci, în 24 de zile cresc $24\cdot\frac{10}{3}=80$ rații, dar inițial păşunea conținea 1600 de rații. În 96 de zile cresc 4·80=320 rații şi 1920 rații sunt consumate în 24 zile de 20 de vaci.

R4.4.8. Cinci prieteni au participat împreună la cumpărarea unui obiect: primul a participat cu jumătate din cât au dat ceilalți; al doilea a participat cu o treime din cât au contribuit ceilalți; al treilea cu o pătrime din contribuția celorlalți; al patrulea cu o cincime din contribuția celorlalți, iar al cincilea a participat cu 75000 lei. Care a fost suma totală şi cu cât a participat fiecare?

Soluție. Dacă primul prieten a contribuit cu jumătate din cât au dat ceilalți, rezultă că primul a contribuit cu $\frac{1}{3}$ din sumă. Analog, al doilea a contribuit cu $\frac{1}{4}$ din sumă, al treilea cu $\frac{1}{5}$ din sumă şi al patrulea cu $\frac{1}{6}$ din sumă. Partea din sumă ce îi revine celui de al cincilea este

$$1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)=1-\frac{57}{60}=\frac{1}{20}.$$

$\frac{1}{20}$ din sumă reprezintă 75000 lei. Suma totală este 1500000 lei. Primul a contribuit cu 500000 lei, al doilea cu 375000 lei, al treilea cu 300000 lei şi al patrulea cu 250000 lei.

R4.4.9. Doi arabi şedeau sub un palmier şi se pregăteau să mănânce, când un călător a apărut şi i-a rugat să ia masa împreună. Primul arab a scos un ulcior cu lapte, al doilea o pâine şi călătorul a scos 6 curmale. După ce au consumat tot ce aveau în mod egal, călătorul le-a lăsat 20 de monede. Cât a revenit fiecărui arab, dacă 4 ulcioare cu lapte costă cât 3 pâini, iar un ulcior cu lapte costă cât 36 de curmale?

Soluție. Dacă un ulcior cu lapte costă cât 36 de curmale, atunci 3 pâini costă cât 4·36=144 curmale, deci o pâine costă cât 48 curmale. Primul arab are echivalentul a 36 curmale, iar al doilea a 48 curmale. În total cei trei au 90 curmale, deci fiecare mănâncă echivalentul a 30 curmale. Călătorul primeşte 6 curmale de la primul arab şi 18 curmale de la al doilea. Deci 20 monede reprezintă costul a 24 de curmale. Primul primeşte $6\cdot\frac{20}{24}=5$ monede, iar al doilea primeşte $18\cdot\frac{20}{24}=15$ monede.