4. Rapoarte şi proporţii

Rapoarte

- Raportul numerelor raţionale *a* şi *b*, $b \neq 0$, este expresia $\frac{a}{b}$; *a* şi *b* se numesc termenii raportului.
- Câtul termenilor unui raport se numeşte valoarea raportului.

  Exemplu: valoarea raportului $\frac{3{,}5}{7}$ este 0,5.
- Termenii unui raport se exprimă întotdeauna cu aceeaşi unitate de măsură.

Aplicaţiile rapoartelor în practică sunt: scara unui plan, scara unei hărţi, probabilitatea realizării unui eveniment, procente, titlul unui aliaj.

4.1. Scara unui plan

Prin scara unui plan înţelegem raportul dintre distanţa din plan şi distanţa din realitate dintre aceleaşi două puncte, ambele distanţe fiind exprimate cu aceeaşi unitate de măsură.

Remarcă. De obicei, numărătorul raportului prin care se exprimă scara este 1.

Model. Figura de mai jos reprezintă planul unui apartament. Acest plan este realizat la scara $\frac{1}{100}$. Aceasta înseamnă că la 1 cm din desen corespund, în realitate, 100cm. Cu alte cuvinte, în plan lungimea sufrageriei este de 5cm, iar în realitate este de 500cm, adică de 5m.

La planul din figură să se determine:

a) lăţimea, în centimetri, a dormitorului

b) dimensiunile, în centimetri, ale bucătăriei

c) perimetrul, în centimetri, a holului

d) aria, în cm^2 a sufrageriei.

Soluţie.

a) Lăţimea dormitorului de 3m, din realitate, este în plan de 3cm.

b) Dimensiunile de 2m şi 3m ale bucătăriei, din realitate, sunt în plan de 2cm, respectiv 3cm.

c) Holul are dimensiunile de 8m şi 2m, în realitate, deci în plan ele vor fi 8cm şi 2cm, rezultă că perimetrul holului în plan este de 20cm.

d) Sufrageria are dimensiunile de 5m şi 4m, în realitate, deci în plan 5cm şi 4cm, rezultă că aria sufrageriei în plan este $20cm^2$.

Probleme rezolvate

R4.1.1. Care este scara planului unei grădini, dacă o latură a grădinii, care are 125m, este reprezentată în plan printr-un segment lung de 25cm?

Soluție. Aplicând definiția scării unui plan, ca fiind raportul dintre distanța din plan şi distanța din realitate, ambele exprimate în aceeaşi unitate de măsură, scara planului este $\frac{25}{12500}$, adică $\frac{1}{500}$.

R4.1.2. O grădină în formă de dreptunghi, are pe un plan cu scara de $\frac{1}{300}$ dimensiunile de 4cm şi 5cm. Ce suprafață, în hectare, are grădina în teren?

Soluție. În planul cu scara $\frac{1}{300}$, lungimea de 1 cm corespunde la 300 cm din realitate. Dimensiunile grădinii vor fi 4·300cm şi 5·300cm, adică 12m şi 15m. Aria grădinii este de 0,018ha.

R4.1.3. Planul unui parc are scara de $\frac{1}{200}$.

a) În plan se află un loc de formă circulară, cu raza de 1m, ce reprezintă lacul. Câți centimetri are raza cercului în plan?

b) Spațiul de joacă pentru copii este, în teren, un pătrat cu aria de $100m^2$. Ce arie are în plan spațiul de joacă pentru copii?

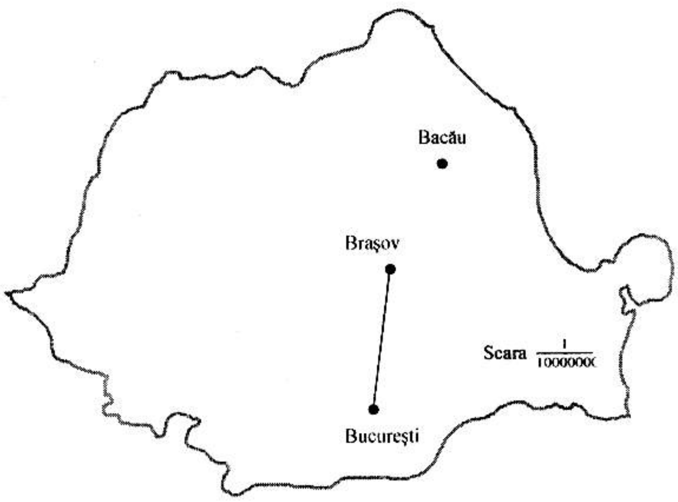
Soluție. a) În planul cu scara de $\frac{1}{200}$, lungimea de 1cm corespunde la 200cm din teren. Dacă raza cercului este în teren 1m, adică 100cm, ea corespunde în plan unei lungimi de 0,5cm.

b) Latura pătratului din teren are 10m, deci 1000cm, iar în plan latura pătratului are 1000:200=5cm. Rezultă că aria pătratului în plan este de $25cm^2$.

4.2. Scara unei hărți

Prin scara unei hărți înțelegem raportul dintre distanța de pe hartă şi distanța din realitate dintre aceleaşi două puncte, distanțele fiind măsurate cu aceeaşi unitate de măsură, iar numărătorul raportului prin care se exprimă scara este 1.

Model. În figura de mai jos, harta României este realizată la scara $\frac{1}{10000000}$, aceasta însemnând că la 1cm de pe hartă corespund 10000000cm=100km în realitate (teren).



De exemplu, distanța pe şosea, dintre Bucureşti şi Braşov, pe hartă, este 17mm, iar distanța din teren d o determinăm astfel:

$$\frac{1}{10000000} = \frac{1{,}7}{d} \Rightarrow d = 17000000\text{cm} = 170\text{km}.$$

Distanța reală dintre oraşele Bacău şi Bucureşti este de 300km. Care este distanța, în centimetri, pe harta cu scara $\frac{1}{10000000}$?

Avem $\frac{1}{10000000} = \frac{x}{30000000} \Rightarrow x = 3\text{cm}$.

4.3. Probabilitate

Definiție. Probabilitatea realizării unui eveniment este raportul dintre numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului şi numărul cazurilor posibile (ale experienței).

Remarcă. Probabilitatea realizării unui eveniment este un număr mai mare sau egal cu 0 şi mai mic sau egal cu 1.

- Evenimentul imposibil are probabilitatea 0.
- Evenimentul sigur are probabilitatea 1.

Model. Într-o urnă sunt bile numerotate de la 1 la 50. Care este probabilitatea ca extrăgând o singură bilă numărul obținut să fie pătrat perfect?

Soluție. În total, există 50 cazuri posibile şi 7 cazuri favorabile (apariția numărului 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49) deci probabilitatea cerută este $p = \frac{7}{50}$.

Probleme rezolvate

R4.3.1. Care este probabilitatea ca aruncând două zaruri, să obținem două fețe însumând: a) 9 puncte; b) un număr prim de puncte.

Soluție. La aruncarea a două zaruri există 6·6=36 cazuri posibile.

a) Numărul cazurilor favorabile obținerii sumei 9 puncte este 4 (3+6, 4+5, 5+4, 6+3), deci probabilitatea cerută este $\frac{4}{36}$, adică $\frac{1}{9}$.

b) Numărul cazurilor favorabile obținerii sumei un număr prim de puncte este 15 (1+1, 1+2, 2+1, 1+4, 2+3, 3+2, 4+1, 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1, 5+6, 6+5), rezultă că probabilitatea cerută este $\frac{15}{36}$, adică $\frac{5}{12}$.

R4.3.2. Într-un coş sunt 6 plicuri albe şi 4 plicuri roşii. Un copil, legat la ochi, extrage două plicuri. Calculați probabilitatea evenimentelor:

E_1 : să extragă două plicuri de aceeaşi culoare

E_2 : să extragă două plicuri de culori diferite.

Soluție. Numărul cazurilor posibile este 9·10=90.

a) Numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului E_1 : 6·5+4·3=42, probabilitatea realizării evenimentului E_1 este $\frac{42}{90}$, adică $p(E_1)=\frac{7}{15}$.

b) Numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului E_2 : 6·4+4·6=48 (sau 90-42); probabilitatea realizării evenimentului E_2 este $\frac{48}{90}$, adică $p(E_2)=\frac{8}{15}$.

Remarcă. Probabilitatea realizării evenimentului E_2 se putea calcula şi $1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$, pentru că singurele situații posibile la extragerea a două plicuri din coş este ca ele să fie de aceeaşi culoare sau de culori diferite.

R4.3.3. O carte cu 270 de pagini este deschisă la întâmplare. Să se determine probabilitatea evenimentelor următoare:

A: numărul paginii din stânga este număr par
B: numărul paginii din dreapta este multiplu de 5
C: numărul paginii din stânga este multiplu de 6
D: numărul paginii din dreapta este divizibil cu 7.

Soluție. Numărul paginii din stânga este întotdeauna par, deci $P(A)=1$.

Numărul paginii din dreapta este întotdeauna număr impar, deci trebuie să numărăm multipli impari ai lui 5, mai mici sau egali cu 265; ei sunt 5·1, 5·3, 5·5,..., 5·53=265, deci în total $\frac{53-1}{2}+1=27$ cazuri favorabile, de unde $P(B)=\frac{27}{135}=\frac{1}{5}$.

Numărul paginii din stânga este număr par întotdeauna şi el trebuie să fie multiplu de 6 mai mic decât 270; obținem 6·1, 6·2, 6·3,..., 6·45=270, 45 cazuri favorabile, de unde $P(C)=\frac{45}{135}=\frac{1}{3}$.

Numărul paginii din dreapta este număr impar, divizibil cu 7 şi mai mic decât 270, obținem 7·1, 7·3, 7·5,..., 7·37, deci în total $\frac{37-1}{2}+1=19$ cazuri favorabile, de unde $P(D)=\frac{19}{135}$.

4.4. Procente

Definiție. Un raport de forma $\frac{p}{100}$, $p\in\mathbf{Q}$, $p\geq 0$, se numeşte raport procentual. Scrierea *p*% înseamnă $\frac{p}{100}$ şi se citeşte "*p* la sută" sau "*p* procente".

Pentru a afla cât reprezintă *p*% dintr-un număr dat *a*, calculăm $\frac{p}{100}\cdot a$.

Pentru a afla un număr necunoscut *x* când ştim că *p*% din *x* reprezintă *b*, calculăm $x=b:\frac{p}{100}$.

Model 1. La faza națională a olimpiadei de matematică participă 600 de elevi. Din numărul total de participanți 5% primesc premiul I, 10% premiul al II-lea, 15% premiul al III-lea şi 20% premii speciale şi mențiuni. Câți elevi primesc premiul I, dar premiul al II-lea, dar premiul al III-lea? Ce procent din numărul elevilor care au primit premii speciale şi mențiuni reprezintă numărul elevilor cu premiul I?

Soluție. Pentru a afla câți elevi au obținut premii şi mențiuni, avem: $\frac{5}{100}\cdot 600=30$ elevi primesc premiul I, $\frac{10}{100}\cdot 600=60$ elevi primesc premiul al II-lea, $\frac{15}{100}\cdot 600=90$ elevi primesc premiul al III-lea şi $\frac{20}{100}\cdot 600=120$ elevi primesc premii speciale şi mențiuni.

Apoi, $\frac{x}{100}\cdot 120=30$, de unde $x=25$, deci 25% din numărul elevilor care au primit mențiuni şi premii speciale reprezintă numărul elevilor care au primit premiul I.

Model 2. Pentru a cumpăra un tricou, o persoană plăteşte 150000lei, ceea ce reprezintă 30% din suma pe care o are. Ce sumă are persoana?

Soluție. Ştim că $\frac{30}{100}\cdot s=150000$, unde s este suma pe care o are persoana. De aici rezultă că $s=150000\cdot\frac{100}{30}$, deci $s=500000$, persoana deține suma de 500000lei.

Probleme rezolvate

R4.4.1. O suprafață de 150ha este arată în trei zile, astfel: în prima zi 40% din suprafață, a doua zi 30% din rest, iar a treia zi ce a mai rămas.

a) Câte hectare s-au arat zilnic?

b) Ce procent din întreaga suprafață s-a arat a doua zi? Dar a treia zi?

Soluție. a) În prima zi s-au arat $\frac{40}{100}\cdot 150=60$ ha. Restul după prima zi este 150-60=90ha. În a doua zi s-au arat $\frac{30}{100}\cdot 90=27$ ha, iar a treia zi restul, adică 90-27=63ha.

b) Avem $\frac{x}{100}\cdot 150=27$, de unde rezultă că $x=18$, deci a doua zi s-a arat 18% din suprafața totală.

La fel, $\frac{y}{100}\cdot 150=63$, de unde rezultă $y=42$, deci a treia zi s-a arat 42% din suprafața totală (sau 100%-40%-18%).

R4.4.2. După ce un turist a parcurs 38% dintr-un drum, constată că i-au mai rămas de parcurs cu 4,8 km mai mult decât a parcurs. Ce lungime are drumul şi cât a parcurs turistul?

Soluție. Dacă dintr-un drum se parcurg 38%, rezultă că rămâne din el de parcurs 62%, deci 4,8km reprezintă diferența dintre partea rămasă şi partea parcursă, deci 24% din drum. Avem $\frac{24}{100}\cdot x=4{,}8$, unde x este lungimea drumului. Rezultă $x=20$, drumul are o lungime de 20km.

Turistul a parcurs $\frac{38}{100}\cdot 20=7{,}6$ km.

R4.4.3. După două reduceri consecutive de prețuri, prima de 10%, iar a doua de 20%, un obiect costă 153000lei. Care a fost prețul inițial al acestui obiect?

Soluție. Notăm cu x prețul inițial al obiectului. Prima reducere de preț este $\frac{10}{100}\cdot x$ şi prețul obiectului după prima reducere este de $\frac{90}{100}\cdot x$; a doua reducere este de $\frac{20}{100}\cdot\frac{90}{100}\cdot x=\frac{18}{100}x$, iar după a doua reducere costul obiectului este $\frac{90}{100}x-\frac{18}{100}x=\frac{72}{100}x$, ceea ce reprezintă 153000lei.

Avem $\frac{72}{100}\cdot x=153000$, de unde rezultă $x=212500$, deci prețul inițial al obiectului a fost 212500lei.

Remarcă. Problema poate fi rezolvată şi folosind metoda mersului invers. Prețul final, 153000lei reprezintă 80% din prețul obiectului după prima ieftinire. Se poate calcula prețul după prima ieftinire $153000:\frac{80}{100}=191250$ lei. Prețul de 191250lei reprezintă 90% din prețul inițial. Calculăm prețul inițial $191250:\frac{90}{100}=212500$ lei.

R4.4.4. Un autocar are de parcurs un traseu în patru etape, astfel: în prima etapă parcurge 30% din traseu, în a doua etapă parcurge 20% din rest, în a treia etapă 25% din noul rest şi îi mai rămân pentru a patra etapă 126km de parcurs. Ce lungime are drumul?

Soluție. Se notează cu x lungimea drumului. În prima etapă se parcurge $\frac{30}{100}\cdot x$, rest $\frac{70}{100}\cdot x$; în a doua etapă se parcurge $\frac{20}{100}\cdot\frac{70}{100}\cdot x=\frac{14}{100}x$, rest $\frac{70}{100}x-\frac{14}{100}x=\frac{56}{100}x$; în a treia etapă se parcurge $\frac{25}{100}\cdot\frac{56}{100}\cdot x=\frac{14}{100}x$, rest $\frac{56}{100}x-\frac{14}{100}x=\frac{42}{100}x$, ceea ce reprezintă 126km. Avem $\frac{42}{100}x=126$, de unde $x=126\cdot\frac{100}{42}$, $x=300$. Lungimea drumului a fost de 300km.

R4.4.5. Numărul $\overline{bc}$ reprezintă 4% din numărul $\overline{abc}$. Să se calculeze $a+b+c\ \ (b\neq 0)$.

Soluție. Ştim că $\overline{bc}=\frac{4}{100}\cdot\overline{abc}$, deci $\overline{bc}=\frac{1}{25}(100a+\overline{bc})$, de unde rezultă că $\overline{bc}=4a+\frac{1}{25}\cdot\overline{bc}$, adică $\frac{24}{25}\overline{bc}=4a$. De aici se deduce că $\overline{bc}\,\vdots\,25$, pentru că $4a$ este natural.

Dacă $\overline{bc}=25$ rezultă că 24=4a, deci a=6, $a+b+c=13$. Dacă $\overline{bc}=50$ sau $\overline{bc}=75$ nu se obține a cifră.

4.5. Titlul unui aliaj

Definiție. Titlul unui aliaj este raportul dintre masa metalului prețios conținut de aliaj şi masa aliajului.

$$\text{Titlul aliajului} = \frac{\text{masa metalului pretios}}{\text{masa aliajului}}, \text{ deci } T = \frac{m}{M}.$$

Observație. Asemănător titlului unui aliaj, se poate defini concentrația unei soluții (amestec).

$$\text{Concentrația soluției (amestecului)} = \frac{\text{masa substantei}}{\text{masa solutiei (amestecului)}}$$

Model.

1. Se face un aliaj, topind la un loc, 16g aur şi 234g cupru. Care este titlul aliajului?

Soluție. $\text{Titlul aliajului} = \frac{\text{masa metal pretios}}{\text{masa aliajului}}$, deci $T = \frac{16}{16+234} = \frac{16}{250}$, de unde rezultă titlul aliajului 0,064.

2. Concentrația de sare dintr-o soluție este 17%. Ce cantitate de sare se găseşte în 27,5kg de soluție?

Soluție. Concentrația soluției reprezintă raportul dintre masa substanței şi masa soluției. Avem $\frac{17}{100} = \frac{x}{27{,}5}$, de unde $x \cdot 100 = 17 \cdot 27{,}5$, deci $x = 4{,}675$. În 27,5kg soluție se află 4,675g sare.

Probleme de amestec şi aliaje

Frecvent în practică se întâlnesc probleme de acest tip. În funcție de datele şi cerințele lor în general, aceste probleme se împart în două categorii.

Probleme de amestec şi aliaj de categoria I

În aceste probleme se cunosc:

a) cantitățile care se amestecă: $m_1, m_2, ..., m_n$

b) calitățile lor: $c_1, c_2, ..., c_n$.

Se cere: c) calitatea amestecului.

Calitatea diverselor produse, substanțe, aliaje etc. care se amestecă, se exprimă prin: grade de temperatură, lei, grade de tărie sau în cazul aliajelor prin titlu.

Teorema 4.5.1. Dacă amestecăm produse de calitățile $c_1, c_2, ..., c_n$ în cantitățile $m_1, m_2, ..., m_n$ $(n \in \mathbf{N})$, atunci calitatea amestecului este dată de relația:

$$C = \frac{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2 + ... + m_n c_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} \qquad (1)$$

Demonstrație. Vom demonstra teorema în ipoteza că produsele respective sunt aliaje cu titlurile $t_1, t_2, ..., t_n$ (deci $c_1 = t_1$, $c_2 = t_2$,..., $c_n = t_n$) şi în cantitățile $m_1, m_2, ..., m_n$. Deci să arătăm că titlul noului aliaj este:

$$T = \frac{m_1 \cdot t_1 + m_2 \cdot t_2 + ... + m_n t_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

Fie $t_1 = \frac{m_1^'}{m_1}$, $t_2 = \frac{m_2^'}{m_2}$,..., $t_n = \frac{m_n^'}{m_2}$, unde $m_1^', m_2^', ..., m_n^'$ sunt cantitățile de metal prețios din fiecare aliaj. Masa totală a metalului prețios din aliajul obținut prin topire la un loc a aliajelor date este:

$$m = m_1^' + m_2^' + ... + m_n^' = m_1 \cdot t_1 + m_2 \cdot t_2 + ... + m_n \cdot t_n$$

Masa totală a aliajului nou obținut este $M = m_1 + m_2 + ... + m_n$. Deci titlul noului aliaj este:

$$T = \frac{m}{M} = \frac{m_1 \cdot t_1 + m_2 \cdot t_2 + ... + m_n \cdot t_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

Observații. 1) Expresia (1) exprimă media aritmetică ponderată a numerelor $c_1, c_2, ..., c_n$ care au ponderile $m_1, m_2, ..., m_n$.

2) Media aritmetică ponderată se obține de fapt ca o medie aritmetică obişnuită ținând seama că fiecare număr intră în această medie cu o anumită pondere.

3) Media aritmetică a unor numere este o medie aritmetică ponderată în care fiecare pondere este egală cu 1.

Probleme de amestec şi aliaj de categoria a II-a

În aceste probleme se cunosc:

a) calitățile produselor care se amestecă

b) calitatea amestecului

c) cantitatea totală a amestecului.

Se cer: d) cantitățile care se amestecă.

Teorema 4.5.2. Dacă amestecăm două produse de calități c_1, respectiv c_2, în cantitățile m_1, respectiv m_2 şi obținem un amestec de calitate *c*, atunci are loc relația:

$$\frac{c - c_2}{c_1 - c} = \frac{m_1}{m_2} \qquad (2)$$

Demonstrație. Din teorema (1) obținem $c=\dfrac{m_1c_1+m_2c_2}{m_1+m_2}$, care prin înlocuire în relația (2) conduce la o propoziție adevărată:

$$\frac{c-c_2}{c_1-c}=\frac{\dfrac{m_1c_1+m_2c_2}{m_1+m_2}-c_2}{c_1-\dfrac{m_1c_1+m_2c_2}{m_1+m_2}}=\frac{m_1c_1+m_2c_2-m_1c_2-m_2c_2}{m_1c_1+m_2c_1-m_1c_1-m_2c_2}=\frac{m_1(c_1-c_2)}{m_2(c_1-c_2)}=\frac{m_1}{m_2}$$

Probleme rezolvate

R4.5.1. Se amestecă 5kg de bomboane cu prețul 54000lei/kg cu 2kg de bomboane cu prețul de 48000lei/kg şi cu 3kg de bomboane cu prețul de 66000lei/kg. Cât este prețul unui kilogram de bomboane ce rezultă în urma amestecului celor trei calități de bomboane?

Soluție. Folosim relația (1) şi obținem prețul unui kilogram de amestec:

$$\frac{5\cdot 54000+2\cdot 48000+3\cdot 66000}{5+2+3}=56400\text{ lei.}$$

R4.5.2. Un aliaj de fier şi nichel are titlul de 0,600, iar un alt aliaj din aceleaşi metale are titlul 0,250. Se topesc aceste aliaje împreună şi rezultă un alt aliaj cu masa de 14kg. Cât este masa fiecărui aliaj, dacă titlul noului aliaj este 0,300?

Soluție. Vom folosi formula (2), unde $c=0{,}300$, $c_1=0{,}600$, $c_2=0{,}250$, m_1 este masa primului aliaj, m_2 este masa celui de al doilea aliaj. Deci: $\dfrac{0{,}300-0{,}250}{0{,}600-0{,}300}=\dfrac{m_1}{m_2}$. Obținem $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{1}{6}$. Ştiind că $m_1+m_2=14$ şi $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{1}{6}$, obținem $m_1=2$ kg şi $m_2=12$ kg.

Remarcă. Problema se poate rezolva şi cu ajutorul formulei (1). Fie m_1,m_2 masele celor două aliaje folosite. Vom avea $\dfrac{m_1\cdot 0{,}600+m_2\cdot 0{,}250}{m_1+m_2}=0{,}300$ şi $m_1+m_2=14$. Dacă $m_2=14-m_1$, avem $m_1\cdot 0{,}6+(14-m_1)\cdot 0{,}25=0{,}3\cdot 14$, de unde $m_1\cdot 0{,}6-m_1\cdot 0{,}25=0{,}7$, deci rezultă $m_1=2$ şi $m_2=12$.

R4.5.3. Se topesc împreună două aliaje formate din aceleaşi metale, care au masele de 3kg şi respectiv 2kg. Titlul primului aliaj este 0,150, iar titlul noului aliaj este 0,400. Aflați titlul celui de al doilea aliaj.

Soluție. Aplicăm formula (1), unde $m_1=3$ kg, $t_1=0{,}150$, $m_2=2$ kg şi $T=0{,}400$. Avem: $T=\dfrac{m_1t_1+m_2t_2}{m_1+m_2}$, iar prin înlocuire se obține:

$\frac{3\cdot 0{,}150+2\cdot t_2}{3+2}=0{,}400$. Efectuând calculele $2t_2+0{,}45=2$, de unde rezultă că $t_2=0{,}775$. Titlul celui de al doilea aliaj este 0,775.

R4.5.4. O soluție de apă cu alcool cântăreşte 600g şi are concentrația de 0,250. Cât alcool trebuie să adăugăm pentru a se obține o soluție cu concentrația de 0,400?

Soluție. Se calculează cantitatea de alcool existentă în 600g soluție, ținând cont de definiția concentrației (raport dintre masa alcoolului şi masa soluției). Avem: $0{,}250=\frac{a}{600}$, de unde $a=150$ g alcool. Notăm cu x cantitatea de alcool care se adaugă pentru a obține o soluție de concentrație 0,400 şi avem: $0{,}400=\frac{150+x}{600+x}$, de unde $150+x=0{,}4x+240$, deci $0{,}6x=90$, iar $x=150$. Trebuie să adăugăm 150g de alcool pentru a obține o soluție de concentrație 0,400.

R4.5.5. Un inel din aur de 14 carate are 6g. Printr-o nouă prelucrare inelul are 18 carate. Să se afle masa inelului după prelucrare.

Soluție. Facem precizarea că în tehnică, atunci când metalul prețios dintr-un aliaj este aurul, titlul se exprimă în carate (k). Aurul pur are titlul 24k, deci dacă un aliaj are titlul 18k, înseamnă că din întreaga masă a aliajului 18 părți sunt aur, iar 6 părți sunt din metal neprețios; titlul este $\frac{18}{24}=0{,}750$ sau 18k.

În cazul acestei probleme se pot ivi două situații:

a) Printr-un procedeu oarecare se separă metalul neprețios din conținutul inelului şi se îndepărtează din acesta o cantitate, astfel încât aliajul respectiv să aibă 18k.

Fie x cantitatea de metal neprețios care se îndepărtează pentru ca inelul să aibă titlul de 18k. Inelul conține: $\frac{14}{24}\cdot 6\text{g}=3{,}5$ g aur. Deci, $(6-x)\cdot\frac{18}{24}=3{,}5$, de unde se obține $x=1\frac{1}{3}$ g. Inelul va cântări $6-1\frac{1}{3}=4\frac{2}{3}$ g.

b) Se adaugă aur pur astfel încât aliajul obținut să aibă titlul de 18k. Fie y cantitatea de aur pur ce trebuie adăugată. Deci, $(6+y)\cdot\frac{18}{24}=3{,}5+y$. Rezolvând această ecuație se obține $y=4$. Inelul va avea în final masa 6+4=10g.

4.6. Proporții

Definiție. Egalitatea a două rapoarte se numeşte proporție.
Termenii celor două rapoarte se numesc termenii proporției.
Orice proporție are patru termeni.

Forma generală a unei proporții este: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $a,b,c,d\in\mathbf{Q}$, $b\neq 0$, $d\neq 0$.

Termenii *a* şi *d* se numesc extremii proporției.

Termenii *b* şi *c* se numesc mezii proporției.

Proprietatea fundamentală a proporțiilor: în orice proporție produsul extremilor este egal cu produsul mezilor.

Aflarea unui termen necunoscut al unei proporții: fiind dată proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, conform proprietății fundamentale a proporțiilor $a\cdot d=b\cdot c$, de unde rezultă că $a=\frac{bc}{d}$, $d=\frac{bc}{a}$, $b=\frac{ad}{c}$ şi $c=\frac{ad}{b}$.

Deci: $\text{un extrem}=\frac{\text{produsul mezilor}}{\text{celalalt extrem}}$

$$\text{un mez}=\frac{\text{produsul extremilor}}{\text{celalalt mez}}$$

Definiție. Unul dintre extremii sau mezii, egali între ei, ai unei proporții se numeşte media proporțională (geometrică) a celorlalți doi termeni.

Proporții derivate cu aceeaşi termeni

Regulă. Dacă într-o proporție se schimbă extremii între ei lăsând mezii neschimbați, se obține tot o proporție, numită proporție derivată cu aceiaşi termeni ca proporția inițială.

Din proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, aplicând regula de mai sus obținem proporția $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ cu aceiaşi termeni ca proporția inițială.

Regulă. Dacă într-o proporție se schimbă mezii între ei lăsând extremii neschimbați, se obține tot o proporție, numită proporție derivată cu aceiaşi termeni ca proporția inițială.

Din proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, aplicând regula de mai sus obținem proporția $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ cu aceiaşi termeni ca proporția inițială.

Regulă. Dacă într-o proporție se schimbă extremii între ei şi mezii între ei, se obține tot o proporție, numită proporție derivată cu aceiaşi termeni ca proporția inițială.

Din proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, aplicând regula de mai sus obținem proporția $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$ cu aceiaşi termeni ca proporția inițială.

Remarcă. Ultima regulă de obținere a proporțiilor derivate cu aceiaşi termeni se mai poate enunța şi astfel: dacă într-o proporție se inversează rapoartele se obține tot o proporție numită proporție derivată cu aceiaşi termeni ca proporția inițială.

Observație. În general, fiind date patru numere distincte a, b, c, d, care formează proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, cu aceste numere se mai pot forma proporțiile:

1) $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$ şi

2) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$, $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$, $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$.

Ultimele proporții sunt identice cu cele de la 1), datorită simetriei relației de egalitate.

Model. Scrieți toate proporțiile cu termenii: 3, 6, 7, 14.

Soluție. Se constată că $3 \cdot 14 = 6 \cdot 7$. Dacă 3 şi 14 sunt extremi, iar 6 şi 7 sunt mezi, avem $\frac{3}{6}=\frac{7}{14}$. Obținem:

$\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$ (prin schimbarea extremilor între ei)

$\frac{3}{7}=\frac{6}{14}$ (prin schimbarea mezilor între ei)

$\frac{14}{7}=\frac{6}{3}$ (prin inversarea rapoartelor)

Dacă 3 şi 14 sunt mezi, iar 6 şi 7 sunt extremi, avem $\frac{6}{3}=\frac{14}{7}$. Obținem:

$\frac{7}{3}=\frac{14}{6}$ (prin schimbarea extremilor între ei)

$\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$ (prin schimbarea mezilor între ei)

$\frac{7}{14}=\frac{3}{6}$ (prin inversarea rapoartelor).

Proporții derivate cu alți termeni

Fie proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Conform proprietății fundamentale a proporțiilor, avem $a \cdot d = b \cdot c$.

Regula 1. Dacă amplificăm unul din rapoartele unei proporții cu un număr, diferit de zero, obținem o proporție cu alți termeni.

Avem $a \cdot d = b \cdot c$. Înmulțind ambii membri ai egalității cu numărul *n*, obținem $adn = bcn$, de unde rezultă $\frac{a}{b} = \frac{cn}{dn}$ sau $\frac{an}{bn} = \frac{c}{d}$.

Prin procedeul indicat de regula 1 se poate obține o infinitate de proporții cu alți termeni decât cei ai proporției inițiale.

Exemplu. Fie proporția $\frac{5}{20} = \frac{3}{12}$. Prin amplificarea primului raport cu 2, obținem $\frac{10}{40} = \frac{3}{12}$, o proporție cu alți termeni. Prin amplificarea celui de al doilea raport cu 10, obținem $\frac{5}{20} = \frac{30}{120}$, o proporție cu alți termeni.

Regula 2. Dacă simplificăm unul din rapoartele unei proporții cu un număr, diferit de zero, obținem o proporție cu alți termeni.

Fie proporția $\frac{a}{b} = \frac{d}{d}$, avem $a \cdot d = b \cdot c$. Înmulțim ambii membri ai egalității cu $\frac{1}{n}$ $(n \neq 0)$, obținem $\frac{a \cdot d}{n} = \frac{b \cdot c}{n}$, ceea ce se poate scrie $\frac{a}{n} \cdot d = \frac{b}{n} \cdot c$ sau $\frac{a:n}{b:n} = \frac{c}{d}$. Asemănător, $\frac{a}{b} = \frac{c:n}{d:n}$.

Exemplu. Fie proporția $\frac{9}{15} = \frac{6}{10}$. Prin simplificarea primului raport cu 3, obținem $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$, o proporție cu alți termeni. Prin simplificarea celui de al doilea raport cu 2, obținem $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$, o proporție cu alți termeni.

Regula 3. Dacă înmulțim ambii numărători (sau ambii numitori) ai unei proporții cu un număr, diferit de zero, obținem tot o proporție, dar cu alți termeni.

Fie proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, avem $a \cdot d = b \cdot c$. Înmulțim ambii membri ai proporției cu *n* şi obținem $adn = bcn$, de unde prin înmulțirea ambilor membri cu $\frac{1}{bd}$ şi realizarea simplificărilor, obținem $\frac{adn}{bd} = \frac{bcn}{bd}$, adică $\frac{an}{b} = \frac{cn}{d}$.

Asemănător din $ad = bc$, prin înmulțirea ambilor membri cu $\frac{1}{bdn}$ şi efectuarea simplificărilor, obținem $\frac{ad}{bdn} = \frac{bc}{bdn}$, adică $\frac{a}{bn} = \frac{c}{dn}$.

Exemplu. Fie proporția $\frac{2}{5}=\frac{10}{25}$.

Prin înmulțirea numărătorilor cu 3, obținem $\frac{6}{5}=\frac{30}{25}$, iar prin înmulțirea numitorilor cu 4, obținem $\frac{2}{20}=\frac{10}{100}$, proporții derivate cu alți termeni.

Regula 4. Dacă împărțim ambii numărători (sau ambii numitori) ai unei proporții cu un număr, diferit de zero, obținem tot o proporție, dar cu alți termeni.

Fie proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, avem $a\cdot d=b\cdot c$. Înmulțind ambii membri cu $\frac{1}{n}$ $(n\neq 0)$, obținem $\frac{ad}{n}=\frac{bc}{n}$, ceea ce se poate scrie $\frac{a}{n}\cdot d=b\cdot\frac{c}{n}$. După înmulțirea ambilor membri cu $\frac{1}{bd}$ şi realizarea simplificărilor, obținem $\frac{\frac{a}{n}\cdot d}{bd}=\frac{b\cdot\frac{c}{n}}{bd}$, adică $\frac{a:n}{b}=\frac{c:n}{d}$.

Asemănător din $ad=bc$, înmulțind ambii membri cu $\frac{1}{n}$, $(n\neq 0)$, obținem $a\cdot\frac{d}{n}=\frac{b}{n}\cdot c$. După înmulțirea ambilor membri cu $\frac{1}{\frac{b}{n}\cdot\frac{d}{n}}$ şi efectuarea simplificărilor obținem: $\frac{a\cdot\frac{d}{n}}{\frac{b}{n}\cdot\frac{d}{n}}=\frac{\frac{b}{n}\cdot c}{\frac{b}{n}\cdot\frac{d}{n}}$, adică $\frac{a}{b:n}=\frac{c}{d:n}$.

Exemplu. Fie proporția $\frac{4}{6}=\frac{8}{12}$.

Prin împărțirea numărătorilor cu 4, obținem $\frac{1}{6}=\frac{2}{12}$, iar prin împărțirea numitorilor cu 3, obținem $\frac{4}{2}=\frac{8}{4}$, proporții derivate cu alți termeni.

Observații. Cu ajutorul celor patru reguli se pot obține o infinitate de proporții derivate cu alți termeni decât ai proporției inițiale.

Fie proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Conform celor patru reguli se pot obține următoarele proporții derivate cu alți termeni:

$\frac{a}{b}=\frac{cn}{dn}$; $\frac{an}{bn}=\frac{c}{d}$; $\frac{a:n}{b:n}=\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}=\frac{c:n}{d:n}$, $\frac{an}{b}=\frac{cn}{d}$; $\frac{a}{bn}=\frac{c}{dn}$; $\frac{a:n}{b}=\frac{c:n}{d}$; $\frac{a}{b:n}=\frac{c}{d:n}$ $(n\neq 0)$.

Proprietate. Fiind dată proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, din ea se pot deduce următoarele proporții derivate cu alți termeni:

P.1. $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$

Fie proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, avem $a\cdot d=b\cdot c$, conform proprietății fundamentale a proporțiilor. Adunând la ambii membri produsul *ac*, rezultă $ad+ac=bc+ac$, de unde scoțând factor comun, $a(d+c)=c(b+a)$. Împărțind ambii membri cu $(b+a)(d+c)$ avem $\frac{a(d+c)}{(b+a)(d+c)}=\frac{c(b+a)}{(b+a)(d+c)}$, adică $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$.

P.2. $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$. Se demonstrează asemănător, adunând produsul *bd* în ambii membri ai egalității $ad=bc$. Avem $ad+bd=bc+bd$, scoatem factor comun $d(a+b)=b(c+d)$, iar după înmulțirea ambilor membri cu $\frac{1}{bd}$, obținem $\frac{d(a+b)}{bd}=\frac{b(c+d)}{bd}$, adică $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

P.3. $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$ ($a-b\neq 0$, $c-d\neq 0$). Se demonstrează asemănător celorlalte. Se scad din *ac* ambii membri ai egalității $ad=bc$, rezultă $ac-ad=ac-bc$, scoțând factor comun obținem $a(c-d)=c(a-b)$. Împărțind ambii membri cu $(c-d)(a-b)$, avem $\frac{a(c-d)}{(c-d)(a-b)}=\frac{c(a-b)}{(c-d)(a-b)}$, adică $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$.

P.4. $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$. Se demonstrează scăzând produsul *bd* din ambii membri ai egalității $ad=bc$, rezultă $ad-bd=bc-bd$, scoțând factor comun avem $d(a-b)=b(c-d)$, iar după împărțirea ambilor membri cu *bd*, avem $\frac{d(a-b)}{bd}=\frac{b(c-d)}{bd}$, adică $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

P.5. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ ($a-b\neq 0$, $c-d\neq 0$). Se demonstrează împărțind membru cu membru egalitățile de la P.2 şi P.4, adică: $\dfrac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}}=\dfrac{\frac{c+d}{d}}{\frac{c-d}{d}}$, care se poate scrie $\frac{a+b}{b}\cdot\frac{b}{a-b}=\frac{c+d}{d}\cdot\frac{d}{c-d}$, adică $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

P.6. $\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$ ($a+b\neq 0$, $c+d\neq 0$). Se demonstrează inversând rapoartele în proporția de la P.5.

P.7. $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$ ($c+d\neq 0$, $c-d\neq 0$). Se demonstrează schimbând mezii între ei în proporția de la P.5.

Model. Fie proporția $\frac{12}{8}=\frac{6}{4}$. Să se obțină proporții derivate cu alți termeni.

Soluție.

Aplicând R.1 (n=3), avem $\frac{12}{8}=\frac{3\cdot 6}{3\cdot 4}$ şi obținem $\frac{12}{8}=\frac{18}{12}$.

Aplicând R.2 (n=4), avem $\frac{12:4}{8:4}=\frac{6}{4}$ şi obținem $\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$.

Aplicând R3. (n=5), avem $\frac{12\cdot 5}{8}=\frac{6\cdot 5}{4}$ şi obținem $\frac{60}{8}=\frac{30}{4}$.

Aplicând R.4 (n=2), avem $\frac{12}{8:2}=\frac{6}{4:2}$ şi obținem $\frac{12}{4}=\frac{6}{2}$.

Aplicând P.1, avem $\frac{12}{8+12}=\frac{6}{4+6}$ şi obținem $\frac{12}{20}=\frac{6}{10}$.

Aplicând P2., avem $\frac{12+8}{8}=\frac{6+4}{4}$ şi obținem $\frac{20}{8}=\frac{10}{4}$.

Aplicând P.3, avem $\frac{12}{12-8}=\frac{6}{6-4}$ şi obținem $\frac{12}{4}=\frac{6}{2}$.

Aplicând P.4 avem $\frac{12-8}{8}=\frac{6-4}{4}$ şi obținem $\frac{4}{8}=\frac{2}{4}$.

Aplicând P.5 avem $\frac{12+8}{12-8}=\frac{6+4}{6-4}$ şi obținem $\frac{20}{4}=\frac{10}{2}$.

Aplicând P.6, avem $\frac{12-8}{12+8}=\frac{6-4}{6+4}$ şi obținem $\frac{4}{20}=\frac{2}{10}$.

Aplicând P.7, avem $\frac{12+8}{6+4}=\frac{12-8}{6-4}$ şi obţinem $\frac{20}{10}=\frac{4}{2}$.

Probleme rezolvate

R4.6.1. Se dă $\frac{a}{b}=0{,}6$. Să se afle $\frac{2a+3b}{3b}$.

Soluţia 1. Din $\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$, prin înmulţirea numărătorilor cu 2, vom avea $\frac{2a}{b}=\frac{6}{5}$, iar prin înmulţirea numitorilor cu 3, obţinem $\frac{2a}{3b}=\frac{6}{15}$ sau $\frac{2a}{3b}=\frac{2}{5}$. Adunăm numitorii la numărător şi obţinem $\frac{2a+3b}{3b}=\frac{2+5}{5}$, de unde $\frac{2a+3b}{3b}=\frac{7}{5}$.

Soluţia 2. Din $\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$, schimbând mezii între ei obţinem $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=k$ (s-a notat prin *k* valoarea rapoartelor $\frac{a}{3}$ şi $\frac{b}{5}$). Din $\frac{a}{3}=k$ rezultă $a=3k$, iar din $\frac{b}{5}=k$ rezultă $b=5k$. Atunci: $\frac{2a+3b}{3b}=\frac{2\cdot 3k+3\cdot 5k}{3\cdot 5k}=\frac{21k}{15k}=\frac{7}{5}$.

Soluţia 3. Din $\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$ rezultă $a=\frac{3b}{5}$ şi atunci:

$$\frac{2a+3b}{3b}=\frac{2\cdot\frac{3b}{5}+3b}{3b}=\frac{b\left(\frac{6}{5}+3\right)}{3b}=\frac{21}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{5}.$$

R4.6.2. Să se afle numerele naturale *x* şi *y*, diferite de 0, astfel ca $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$ şi $\frac{4x+y+5(x+y)}{24}=3$.

Soluţia 1. Din $\frac{4x+y+5(x+y)}{24}=3$, obţinem prin efectuarea calculelor de la numărător $\frac{9x+6y}{24}=3$ sau $\frac{3(3x+2y)}{24}=3$, adică $\frac{3x+2y}{8}=3$, de unde rezultă că $3x+2y=24$. Dar $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$ şi conform proprietăţii fundamentale a proporţiilor

$3x=2y$, care se înlocuieşte în relația precedentă obținându-se $2y+2y=24$ sau $y=6$. Dar $x=\frac{2y}{3}$, deci $x=4$.

Soluția 2. Notăm $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=k$ deci obținem $x=2k$ şi $y=3k$. Atunci $\frac{4x+y+5(x+y)}{24}=3$ devine $\frac{4\cdot 2k+3k+5(2k+3k)}{24}=3$, iar după efectuarea calculelor obținem $\frac{36k}{24}=3$, de unde $k=2$. Din $x=2k$ şi $y=3k$ vom obține $x=4$, $y=6$.

R4.6.3. Să se afle trei numere, ştiind că raportul dintre primul şi al doilea este 0,(6), raportul dintre al doilea şi al treilea este 0,8(3), iar produsul dintre primul şi al treilea număr este 9331,2.

Soluție. Notăm în ordine cele trei numere cu *x, y, z*. Din datele problemei, obținem $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$, $\frac{y}{z}=\frac{5}{6}$ şi $xz=9331{,}2$. Din $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ şi $\frac{z}{y}=\frac{6}{5}$, prin înmulțire membru cu membru se obține $\frac{xz}{y^2}=\frac{4}{5}$, de unde rezultă $\frac{9331{,}2}{y^2}=\frac{4}{5}$, deci $y^2=11664$, sau $y^2=(2^2\cdot 3^3)^2$. Obținem $y=108$ sau $y=-108$. Din $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$, rezultă $x=\frac{2y}{3}$, deci $x=72$ sau $x=-72$. Din $\frac{y}{z}=\frac{5}{6}$, rezultă $z=\frac{6y}{5}$, deci $z=129{,}6$ sau $z=-129{,}6$.

R4.6.4. Ştiind că $\frac{20a+9b}{3b-2a}=5$, să se arate că *a* este 20% din *b*.

Soluție. Din relația dată rezultă că $20a+9b=5(3b-2a)$, iar după efectuarea calculelor $20a+9b=15b-10a$, de unde $30a=6b$ sau $\frac{a}{b}=\frac{6}{30}$, deci $\frac{a}{b}=\frac{1}{5}$. Se schimbă mezii între ei şi se obține $\frac{a}{1}=\frac{b}{5}=k$, de unde $a=k$ şi $b=5k$. Vom avea: $\frac{x}{100}\cdot b=a$, adică $\frac{x}{100}\cdot 5k=k$, de unde $x=20$, deci 20% din *a* reprezintă *b*.

R4.6.5. Să se afle ariile a două dreptunghiuri, ştiind că raportul lungimilor lor este $\frac{4}{3}$, raportul lățimilor lor este $\frac{7}{9}$, iar diferența ariilor este 4.

Soluție. Notăm L şi L' lungimile celor două dreptunghiuri şi l, l' lățimile celor două dreptunghiuri. Avem raportul lungimilor $\frac{L}{L'}=\frac{4}{3}$ şi raportul lățimilor $\frac{l}{l'}=\frac{7}{9}$. Diferența ariilor celor două dreptunghiuri este $Ll-L'l'=4$. Din $\frac{L}{L'}=\frac{4}{3}$ şi $\frac{l}{l'}=\frac{7}{9}$, prin înmulțirea membru cu membru, obținem $\frac{Ll}{L'l'}=\frac{28}{27}$, apoi facem proporții derivate $\frac{Ll-L'l'}{L'l'}=\frac{28-27}{27}$, adică $\frac{4}{L'l'}=\frac{1}{27}$, deci $L'l'=108$. Din $Ll-108=4$, rezultă $Ll=112$. Deci ariile celor două dreptunghiuri sunt 112 şi 108.

R4.6.6. Suma a două fracții cu acelaşi numărător este $1\frac{1}{15}$. Raportul numitorilor este $\frac{1}{3}$. Să se afle cele două fracții.

Soluție. Fie $\frac{a}{b}$ şi $\frac{a}{c}$ cele două fracții $(b,c\neq 0)$. Avem $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=\frac{16}{15}$, de unde rezultă că $\frac{a(b+c)}{bc}=\frac{16}{15}$. Raportul numitorilor este $\frac{b}{c}=\frac{1}{3}$, de unde proporția $\frac{b+c}{c}=\frac{4}{3}$. Prin înlocuire în relația dinainte, avem $\frac{a}{b}\cdot\frac{4}{3}=\frac{16}{15}$, de unde $\frac{a}{b}=\frac{4}{5}$. Suma celor două fracții este $\frac{16}{15}$, deci $\frac{a}{c}=\frac{16}{15}-\frac{4}{5}$, $\frac{a}{c}=\frac{4}{15}$. Fracțiile sunt $\frac{4}{5}$ şi $\frac{4}{15}$.

4.7. Şir de rapoarte egale

Definiție. Un şir de rapoarte cu aceeaşi valoare, scrise sub forma $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots$, se numeşte şir de rapoarte egale.

Observații. 1) Orice pereche de rapoarte din şir formează o proporție.

2) Amplificând succesiv un raport cu mai multe numere diferite de zero, se obține un şir de rapoarte egale:

$$\frac{a}{b}=\frac{an}{bn}=\frac{ak}{bk}=\ldots$$

Fie şirul de rapoarte egale $\frac{a}{b}=\frac{an}{bn}=\frac{ak}{bk}$. Să considerăm raportul dintre suma numărătorilor şi suma numitorilor $\frac{a+an+ak}{b+bn+bk}$. Scoatem factorul comun a la numărător şi b la numitor şi obținem $\frac{a(1+n+k)}{b(1+n+k)}$, care se simplifică şi rezultă $\frac{a}{b}$.

Deci, $\frac{a}{b}=\frac{an}{bn}=\frac{ak}{bk}=\frac{a+an+ak}{b+bn+bk}$.

Proprietatea şirului de rapoarte egale. Într-un şir de rapoarte egale, raportul dintre suma numărătorilor şi suma numitorilor este egal cu fiecare din celelalte rapoarte.

În general, dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, atunci $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$.

Model. Ştiind că $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{3}{4}$, să se calculeze:

a) $\frac{a+c+e}{b+d+f}$; b) $\frac{3a+4c+5e}{3b+4d+5f}$; c) $\frac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2}$.

Soluție. a) Dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, atunci $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$, dar $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$, deci $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{3}{4}$.

b) Dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, atunci prin amplificarea primului raport cu 3, al celui de al doilea cu 4 şi al celui de al treilea cu 5, se obține $\frac{3a}{3b}=\frac{4c}{4d}=\frac{5e}{5f}$, de unde rezultă că $\frac{3a}{3b}=\frac{4c}{4d}=\frac{5e}{5f}=\frac{3a+4c+5e}{3b+4d+5f}$, dar $\frac{3a}{3b}=\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$, deci $\frac{3a+4c+5e}{3b+4d+5f}=\frac{3}{4}$.

c) Dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{3}{4}$, rezultă că $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=\frac{e^2}{f^2}=\frac{9}{16}$, prin ridicarea la pătrat a fiecărui raport. Rezultă, aplicând proprietatea şirului de rapoarte egale că $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=\frac{e^2}{f^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2+d^2+f^2}$, dar $\frac{a^2}{b^2}=\frac{9}{16}$, deci $\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2+d^2+f^2}=\frac{9}{16}$.

Remarcă. Dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$, atunci $\frac{ma}{mb}=\frac{nc}{nd}=\frac{pe}{pf}=k$, de unde $\frac{ma+nc+pe}{mb+nd+pf}=k$, $m,n,p\neq 0$.

Probleme rezolvate

R4.7.1. Ştiind că $\frac{2a}{3}=\frac{3b}{5}=\frac{5c}{4}$ şi că $a+b+c=119$, să se afle *a, b, c.*

Soluţia 1. Dacă $\frac{2a}{3}=\frac{3b}{5}=\frac{5c}{4}$, atunci $\frac{a}{\frac{3}{2}}=\frac{b}{\frac{5}{3}}=\frac{c}{\frac{4}{5}}$, de unde rezultă aplicând proprietatea şirului de rapoarte egale

$$\frac{a}{\frac{3}{2}}=\frac{b}{\frac{5}{3}}=\frac{c}{\frac{4}{5}}=\frac{a+b+c}{\frac{3}{2}+\frac{5}{3}+\frac{4}{5}}=\frac{119}{\frac{119}{30}}=119\cdot\frac{30}{119}=30.$$

Din $\frac{a}{\frac{3}{2}}=30$, rezultă *a*=45, din $\frac{b}{\frac{5}{3}}=30$, rezultă *b*=50 şi din $\frac{c}{\frac{4}{5}}=30$, rezultă *c*=24.

Soluţia 2. Notăm valoarea comună a rapoartelor cu *k* şi avem: $\frac{2a}{3}=\frac{3b}{5}=\frac{5c}{4}=k$, de unde $a=\frac{3k}{2}$, $b=\frac{5k}{3}$, $c=\frac{4k}{5}$. Înlocuind în $a+b+c=119$, se obţine $\frac{3k}{2}+\frac{5k}{3}+\frac{4k}{5}=119$, de unde se obţine după efectuarea calculelor $\frac{111k}{30}=119$, adică *k*=30. Atunci $a=\frac{3\cdot 30}{2}=45$, $b=\frac{5\cdot 30}{3}=50$ şi $c=\frac{4\cdot 30}{5}=24$.

R4.7.2. Să se determine numerele *x, y, z* naturale, ştiind că $\frac{x}{3}=\frac{y}{8}$, $\frac{y}{6}=\frac{z}{2}$ şi a) $x+y+z=123$; b) $5x+y-8z=25$; c) $x^2+y^2+z^2=6489$.

Soluţie. Fiind date proporţiile $\frac{x}{3}=\frac{y}{8}$ şi $\frac{y}{6}=\frac{z}{2}$ se poate forma un şir de rapoarte egale astfel: înmulţim numitorii primei proporţii cu 3 şi înmulţim numitorii celei de a doua proporţii cu 4, vom obţine două proporţii derivate cu alţi termeni şi anume, $\frac{x}{9}=\frac{y}{24}$ şi $\frac{y}{24}=\frac{z}{8}$, de unde rezultă $\frac{x}{9}=\frac{y}{24}=\frac{z}{8}$.

a) Aplicând proprietatea şirului de rapoarte egale, obţinem:

$\frac{x}{9}=\frac{y}{24}=\frac{z}{8}=\frac{x+y+z}{9+24+8}=\frac{123}{41}=3$, de unde *x*=27, *y*=72, *z*=24.

b) Avem $\frac{x}{9}=\frac{y}{24}=\frac{z}{8}=k$, k fiind valoarea comună a fiecărui raport, atunci $x=9k$, $y=24k$, $z=8k$. Prin înlocuire în $5x+y-8z=25$, se obține $45k+24k-64k=25$, adică $5k=25$, de unde k=5. Avem $x=9\cdot 5=45$, $y=24\cdot 5=120$ şi $z=8\cdot 5=40$.

Remarcă. Dacă $\frac{x}{9}=\frac{y}{24}=\frac{z}{8}$, atunci prin amplificarea primului raport cu 5 şi al celui de al treilea lui 8, obținem $\frac{5x}{45}=\frac{y}{24}=\frac{8z}{64}$, de unde aplicând proprietatea şirului de rapoarte egale se obține

$$\frac{5x}{45}=\frac{y}{24}=\frac{8z}{64}=\frac{5x+y-8z}{45+24-64}=\frac{25}{5}=5.$$

Avem $\frac{x}{9}=5$, deci x=45, $\frac{y}{24}=5$, deci y=120 şi $\frac{z}{8}=5$, deci z=40.

c) Dacă $\frac{x}{9}=\frac{y}{24}=\frac{z}{8}$, atunci $\frac{x^2}{81}=\frac{y^2}{576}=\frac{z^2}{64}$ şi aplicând proprietatea şirului de rapoarte egale $\frac{x^2}{81}=\frac{y^2}{576}=\frac{z^2}{64}=\frac{x^2+y^2+z^2}{81+576+64}=\frac{6489}{721}=9$. Avem $\frac{x^2}{81}=9$, x natural, deci $\frac{x}{9}=3$, de unde x=27, $\frac{y^2}{576}=9$, y natural, deci $\frac{y}{24}=3$, de unde y=72, $\frac{z^2}{64}=9$, z natural, deci $\frac{z}{8}=3$, de unde z=24.

Remarcă. Dacă $\frac{x}{9}=\frac{y}{24}=\frac{z}{8}=k$, atunci $x=9k$, $y=24k$, $z=8k$. Prin înlocuire în $x^2+y^2+z^2=6489$, vom avea $81k^2+576k^2+64k^2=6489$ adică $721k^2=6489$, de unde k=3. Obținem x=27, y=72, z=24.

R4.7.3. Fie $\frac{x}{0,(1)}=\frac{y}{0,(3)}$ şi $\frac{y}{0,(5)}=\frac{z}{0,(7)}$ cu $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$. Să se afle *x, y, z*, ştiind că $x+y+z=123$.

Soluție. Efectuând transformările, se obține $\frac{x}{\frac{1}{9}}=\frac{y}{\frac{1}{3}}$ şi $\frac{y}{\frac{5}{9}}=\frac{z}{\frac{7}{9}}$. Înmulțim ambii membri ai celor două egalități cu $\frac{1}{9}$ şi obținem $\frac{1}{9}\cdot\frac{x}{\frac{1}{9}}=\frac{y}{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{9}$, adică $\frac{x}{1}=\frac{y}{3}$ şi

$\frac{1}{9}\cdot\frac{y}{\frac{5}{9}}=\frac{1}{9}\cdot\frac{z}{\frac{7}{9}}$, adică $\frac{y}{5}=\frac{z}{7}$. În egalitatea $\frac{x}{1}=\frac{y}{3}$ înmulțim fiecare membru cu $\frac{1}{5}$ şi obținem $\frac{1}{5}\cdot\frac{x}{1}=\frac{1}{5}\cdot\frac{y}{3}$, adică $\frac{x}{5}=\frac{y}{15}$ (1).

În egalitatea $\frac{y}{5}=\frac{z}{7}$, înmulțim fiecare membru cu $\frac{1}{3}$ şi obținem $\frac{1}{3}\cdot\frac{y}{5}=\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{7}$, adică $\frac{y}{15}=\frac{z}{21}$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă şirul de rapoarte egale $\frac{x}{5}=\frac{y}{15}=\frac{z}{21}$ şi aplicând proprietatea şirului de rapoarte egale avem

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{15}=\frac{z}{21}=\frac{x+y+z}{5+15+21}=\frac{123}{41}=3.$$

Deci, $\frac{x}{5}=3$, de unde x=15, $\frac{y}{15}=3$, de unde y=45 şi $\frac{z}{21}=3$, de unde z=63.

R4.7.4. Fie *a, b, c* trei numere nenule, astfel încât:

$$2a=5b=9c=x(a+b+c).$$

Să se determine valoarea lui *x*.

Soluție. Relația dată se poate scrie $\frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{b}{\frac{1}{5}}=\frac{c}{\frac{1}{9}}=\frac{a+b+c}{\frac{1}{x}}$. Aplicând proprietatea şirului de rapoarte egale: $\frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{b}{\frac{1}{5}}=\frac{c}{\frac{1}{9}}=\frac{a+b+c}{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}}$, rezultă că $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}$, adică $\frac{1}{x}=\frac{73}{90}$, de unde $x=\frac{90}{73}$.

R4.7.5. Să se afle numere *a, b, c*, ştiind că $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{6}$ şi $abc=576$.

Soluție. Notăm $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{6}=k$, de unde $a=3k$, $b=4k$ şi $c=6k$. Înlocuind în $abc=576$, se obține $3k\cdot4k\cdot6k=576$, de unde rezultă $k^3=8$, deci k=2. Avem $a=3\cdot2=6$, $b=4\cdot2=8$, $c=6\cdot12=72$.

4.8. Proporționalitate directă. Proporționalitate inversă

Definiție. Între două mulțimi finite de numere există o proporționalitate directă, dacă se poate forma un şir de rapoarte egale, diferite de zero, astfel încât numărătorii rapoartelor să fie elementele unei mulțimi, iar numitorii elementele celeilalte mulțimi.

Exemplu. Între mulțimile $\{2,6,4\}$ şi $\{10,30,20\}$ se stabileşte o proporționalitate directă, deoarece $\frac{2}{10}=\frac{6}{30}=\frac{4}{20}$.

Observație. Dacă elementele unei mulțimi A finite de numere se pot obține prin înmulțirea elementelor unei mulțimi B cu un număr dat n ($n\neq 0$), atunci între cele două mulțimi există o proporționalitate directă.

Într-adevăr, fie mulțimea $B=\{a,b,c\}$. Prin înmulțirea elementelor ei cu numărul n ($n\neq 0$), obținem mulțimea $A=\{an,bn,cn\}$. Cu elementele celor două mulțimi, A şi B, se poate forma un şir de rapoarte egale $\frac{a}{an}=\frac{b}{bn}=\frac{c}{cn}$ (valoarea rapoartelor este $\frac{1}{n}$); deci între cele două mulțimi A şi B am stabilit o proporționalitate directă.

Exemple. 1) Între mulțimea ciocolatelor şi mulțimea costurilor lor se stabileşte o proporționalitate directă.

2) Între viteza de deplasare şi spațiul parcurs de un mobil în mişcare uniformă, se stabileşte o proporționalitate directă.

3) Între spațiul parcurs de un mobil cu viteză constantă şi timpul în care se efectuează deplasarea se stabileşte o proporționalitate directă.

4) Între numărul de robinete cu acelaşi debit şi volumul de lichid acumulat se stabileşte o proporționalitate directă.

Model. Să se determine trei numere direct proporționale cu 3, 9, 12, dacă suma lor este 40.

Soluție. Fie x, y, z cele trei numere. Vom avea $\frac{x}{3}=\frac{y}{9}=\frac{z}{12}$ şi $x+y+z=40$. Aplicând proprietatea şirului de rapoarte egale, avem $\frac{x}{3}=\frac{y}{9}=\frac{z}{12}=\frac{z+y+z}{3+9+12}=\frac{40}{24}=\frac{5}{3}$. Se deduce că $x=\frac{3\cdot 5}{3}=5$, $y=\frac{9\cdot 5}{3}=15$ şi $z=\frac{12\cdot 5}{3}=20$.

Remarcă. Se poate aplica şi metoda: $\frac{x}{3}=\frac{y}{9}=\frac{z}{12}=k$, de unde $x=3k$, $y=9k$, $z=12k$ şi înlocuind în $x+y+z=40$, obținem $24k=40$, deci $k=\frac{5}{3}$. Rezultă $x=5$, $y=15$, $z=20$.

Definiție. Între două mulțimi finite de numere există o proporționalitate inversă, dacă se poate forma un şir de produse egale, diferite de zero, astfel încât mulțimea primilor factori ai produselor să fie una din mulțimi, iar mulțimea celorlalți factori ai produselor să fie cealaltă mulțime.

Exemplu. Între mulțimile {9,12,18} și {4,3,2} se stabilește o proporționalitate inversă, deoarece 9·4=12·3=18·2.

Observație. Dacă împărțim un număr dat, diferit de zero, cu elementele unei mulțimi finite de numere nenule, obținem o altă mulțime astfel încât între cele două mulțimi să existe o proporționalitate inversă.

Într-adevăr, numărul n împărțit succesiv la elementele mulțimii $A=\{a,b,c\}$, se obține mulțimea $B=\left\{\frac{n}{a},\frac{n}{b},\frac{n}{c}\right\}$. Cu elementele acestor două mulțimi putem forma un șir de produse a căror valoare este n; deci $a\cdot\frac{n}{a}=b\cdot\frac{n}{b}=c\cdot\frac{n}{c}$ (valoarea produselor este n); deci între cele două mulțimi A și B s-a stabilit o proporționalitate inversă.

Exemple. 1) Între numărul robinetelor, cu același debit și timpul de umplere al unui rezervor se stabilește o proporționalitate inversă.

2) Între numărul muncitorilor și timpul de realizare a unei anumite lucrări, se stabilește o proporționalitate inversă.

3) Între viteza constantă de parcurgere a unei distanțe și timpul de deplasare, se stabilește o proporționalitate inversă.

4) Între numărul de bancnote și valoarea bancnotelor cu care se plătește o anumită sumă, se stabilește o proporționalitate inversă.

Remarcă. Între elementele mulțimilor $A=\{a,b,c\}$ și $B=\{m,n,p\}$ se stabilește o proporționalitate inversă, deci $a\cdot m=b\cdot n=c\cdot p$. Această relație este echivalentă cu: $a:\frac{1}{m}=b:\frac{1}{n}=c:\frac{1}{p}$ sau $\frac{a}{\frac{1}{m}}=\frac{b}{\frac{1}{n}}=\frac{c}{\frac{1}{p}}$, de unde rezultă că între elementele mulțimilor $\{a,b,c\}$ și $\left\{\frac{1}{m},\frac{1}{n},\frac{1}{p}\right\}$ s-a stabilit o proporționalitate directă.

Model. Două numere sunt invers proporționale cu numerele 0,2 și 0,5. Suma dintre dublul primului număr și al doilea număr este 24. Să se afle aceste numere.

Soluție. Notând x primul număr și y al doilea număr, relațiile dintre acestea, conform problemei sunt: $x\cdot\frac{1}{5}=y\cdot\frac{1}{2}$ și $2x+y=24$. Avem $\frac{x}{5}=\frac{y}{2}=k$, de unde $x=5k$, $y=2k$ și prin înlocuire în $2x+y=24$ se obține $10k+2k=24$, deci $k=2$. Numerele sunt $x=10$, $y=4$.

Probleme rezolvate

R4.8.1. Un şir de 5 numere este format astfel încât primele 3 numere sunt direct proporţionale cu 4, 5, 6, iar ultimele 3 numere sunt invers proporţionale cu 4, 5, 6.

a) Să se afle cele mai mici 5 numere naturale care satisfac cerinţele puse.

b) Să se afle cele 5 numere care satisfac condiţiile cerute, dacă suma lor este 476.

Soluţie. a) Fie *a, b, c, d, e* cele 5 numere. Conform enunţului $\frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}$ şi $\frac{c}{\frac{1}{4}}=\frac{d}{\frac{1}{5}}=\frac{e}{\frac{1}{6}}$. În ultimul şir de rapoarte egale înmulţim toţi numitorii cu 60 şi obţinem $\frac{c}{15}=\frac{d}{12}=\frac{e}{10}$. Pentru a obţine un raport comun aflăm c.m.m.m.c. al numerelor 6 şi 15 (numitorii lui *c*), care este 30. În relaţia $\frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}$, înmulţim toţi numitorii cu 30:6=5 şi în relaţia $\frac{c}{15}=\frac{d}{12}=\frac{e}{10}$ înmulţim toţi numitorii cu 30:15=2 şi obţinem: $\frac{a}{20}=\frac{b}{25}=\frac{c}{30}$ şi $\frac{c}{30}=\frac{d}{24}=\frac{e}{20}$, de unde rezultă că: $\frac{a}{20}=\frac{b}{25}=\frac{c}{30}=\frac{d}{24}=\frac{e}{20}$. Cele mai mici numere naturale care satisfac această condiţie, vor fi cele pentru care valoarea comună a rapoartelor este 1; deci numerele căutate sunt 20, 25, 30, 24, 20.

b) Din $\frac{a}{20}=\frac{b}{25}=\frac{c}{30}=\frac{d}{24}=\frac{e}{20}=\frac{a+b+c+d+e}{20+25+30+24+20}=\frac{476}{119}=4$, rezultă *a*=80, *b*=100, *c*=120, *d*=96, *e*=80.

R4.8.2. Să se determine numărul $\overline{abc}$, ştiind că numerele $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ sunt direct proporţionale cu numerele 3, 2, 6, iar suma cifrelor numărului $\overline{abc}$ este divizibilă cu 7.

Soluţie. Scriem că $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ sunt direct proporţionale cu 3, 2, 6 şi apoi aplicăm proprietatea şirului de rapoarte egale:

$$\frac{\overline{ab}}{3}=\frac{\overline{bc}}{2}=\frac{\overline{ca}}{6}=\frac{\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}}{3+2+6}=\frac{10a+b+10b+c+10c+a}{11}=$$

$=\frac{11(a+b+c)}{11}=a+b+c$. Dar, suma cifrelor este divizibilă cu 7 şi este un număr mai mic decât 27 (suma maximă este suma cifrelor numărului 999). Această sumă poate fi 7, 14 sau 21.

a) Dacă $a+b+c=7$, atunci $\overline{ab}=21$, $\overline{bc}=14$, $\overline{ca}=42$, adică a=2, b=1, c=4, deci $\overline{abc}=214$.

b) Dacă $a+b+c=14$, atunci $\overline{ab}=42$, $\overline{bc}=28$, $\overline{ca}=84$, adică a=4, b=2, c=8, deci $\overline{abc}=428$.

c) Dacă $a+b+c=21$, atunci $\overline{ab}=63$, $\overline{bc}=42$, $\overline{ca}=126$, imposibil.

VI.R4.8.3. O sumă de bani a fost distribuită la trei persoane direct proporțional cu numerele $\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{3}$. În acest mod o persoană constată că primeşte cu 46200 lei mai mult decât dacă aceeaşi sumă s-ar fi distribuit invers proporțional cu 12, 10, respectiv 15.

a) Care a fost suma de bani?

b) Cât a primit fiecare din cele trei persoane?

Soluție. Notăm cu s suma totală de bani, cu a, b, c sumele ce revin celor trei persoane distribuite direct proporțional cu $\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{3}$ şi cu x, y, z sumele ce revin celor trei persoane dacă ar fi distribuite invers proporțional cu 12, 10, 15. Avem:

$$\frac{a}{\frac{1}{6}}=\frac{b}{\frac{1}{5}}=\frac{c}{\frac{1}{3}}=\frac{a+b+c}{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}}=\frac{s}{\frac{7}{10}} \quad (1) \text{ şi}$$

$$\frac{x}{\frac{1}{12}}=\frac{y}{\frac{1}{10}}=\frac{z}{\frac{1}{15}}=\frac{x+y+z}{\frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}=\frac{s}{\frac{1}{4}} \quad (2).$$

Din relația (1) rezultă că $a=\frac{5s}{21}$. $b=\frac{2s}{7}$ şi $c=\frac{10s}{21}$, iar din relația (2) rezultă că $x=\frac{s}{3}$, $y=\frac{2s}{5}$ şi $z=\frac{4s}{15}$. Comparăm sumele obținute de fiecare persoană prin cele două procedee de împărțire: $\frac{5s}{21}<\frac{s}{3}$, $\frac{2s}{7}<\frac{2s}{5}$ şi $\frac{10s}{21}>\frac{4s}{15}$. Doar a treia persoană primeşte mai mult prin împărțirea sumei direct proporțional cu numerele $\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{3}$. Deci, 46200lei reprezintă diferența dintre cele două sume, avem $\frac{10s}{21}-\frac{4s}{15}=46200$. Efectuând calculele obținem $\frac{150s}{21\cdot 15}-\frac{84s}{21\cdot 15}=46200$, de unde $\frac{66s}{21\cdot 15}=46200$; rezultă $s=\frac{46200\cdot 21\cdot 15}{66}$, deci s=700·21·15, s=220500. Suma inițială a fost de 220500lei.

b) Pentru a calcula ce sumă revine fiecărei persoane, avem $a=\frac{5\cdot 220500}{21}=52500$; $b=\frac{2\cdot 220500}{7}=63000$ şi $c=\frac{10\cdot 220500}{21}=105000$.
Cele trei persoane au primit 52500lei, 63000lei şi 105000lei.

R4.8.4. Numerele $x+y, y+z, z+x$ sunt direct proporționale cu numerele 4, 6, 8.

a) Aflați valoarea raportului $\frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2}$.

b) Dacă $a,b,c\in\{1,2,...,9\}$, $a\neq b\neq c\neq a$, să se determine valorile maxime şi minime ale raportului $\frac{axy+bxz+cyz}{x^2+y^2+z^2}$.

Soluție. a) Avem $\frac{x+y}{4}=\frac{y+z}{6}=\frac{z+x}{8}=k$, de unde $x+y=4k$, $y+z=6k$ şi $z+x=8k$, iar prin adunare membru cu membru a celor trei egalități obținem $2x+2y+2z=18k$, deci $x+y+z=9k$. Dacă $x+y+z=9k$ şi $x+y=4k$, rezultă că $z=5k$. Dacă $x+y+z=9k$ şi $y+z=6k$, rezultă că $x=3k$. Dacă $x+y+z=9k$ şi $z+x=8k$, rezultă că $y=k$. Se obține $\frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2}=\frac{3k^2+15k^2+5k^2}{9k^2+k^2+25k^2}=\frac{23}{35}$.

b) Valoarea maximă a raportului $\frac{axy+bxz+cyz}{x^2+y^2+z^2}$ se obține când *b*=9, *c*=8 şi *a*=7 (deoarece $xz>yz>xy$) şi este

$$\frac{7\cdot 3k^2+9\cdot 15k^2+8\cdot 5k^2}{35k^2}=\frac{196}{35}=\frac{28}{5}.$$

Valoarea minimă a raportului $\frac{axy+bxz+cyz}{a^2+b^2+c^2}$ se obține când *b*=1, *c*=2 şi *a*=3 (deoarece $xz>yz>xy$) şi este $\frac{3\cdot 3k^2+1\cdot 15k^2+2\cdot 5k^2}{35k^2}=\frac{34}{35}$.

R4.8.5. Aflați numerele *a, b, c* naturale, ştiind că numerele a^3, b^2, c sunt direct proporționale cu 8, 4, 2 şi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{24}{c}$.

Soluție. Avem $\frac{a^3}{8}=\frac{b^2}{4}=\frac{c}{2}=k^6$, de unde rezultă că $a^3=8k^6$, $b^2=4k^6$ şi $c=2k^6$, deci $a=2k^2$, $b=2k^3$ şi $c=2k^6$. Prin înlocuire în relația $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{24}{c}$, se obține $\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{2k^3}=\frac{24}{2k^6}$. După efectuarea calculelor obținem $\frac{k+1}{2k^3}=\frac{24}{2k^6}$, de unde rezultă că $k^3(k+1)=24$, dar *k* fiind număr natural avem $k^3(k+1)=2^3\cdot 3$, deci *k*=2. Se obține *a*=8, *b*=16, *c*=128.

R4.8.6. Se dau numerele naturale *a, b, c, d* astfel încât $5\cdot a=b\cdot 7$, *c* este 60% din *b*, iar raportul dintre *c* și *d* este 1,5. Să se arate că *a, b, c, d* sunt invers proporționale cu numerele 0,(142857); 0,2; $\frac{1}{3}$; 0,5.

Soluție. Dacă $5\cdot a=b\cdot 7$, atunci $\frac{a}{7}=\frac{b}{5}$. Se știe că *c* este 60% din *b*, deci $c=\frac{3}{5}\cdot b$, de unde rezultă că $\frac{b}{5}=\frac{c}{3}$. Avem $\frac{c}{d}=\frac{3}{2}$, de unde $\frac{c}{3}=\frac{d}{2}$. Se poate scrie următorul șir de rapoarte egale: $\frac{a}{7}=\frac{b}{5}=\frac{c}{3}=\frac{d}{2}$. Conform definiției proporționalității directe rezultă că numerele *a, b, c, d* sunt direct proporționale cu 7, 5, 3, 2, de unde rezultă că *a, b, c, d* sunt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{7},\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{2}$. Ținând cont că $\frac{1}{7}=0,(142857)$, $\frac{1}{5}=0,2$ și $\frac{1}{2}=0,5$, avem *a, b, c, d* sunt invers proporționale cu numerele 0,(142857); 0,2; $\frac{1}{3}$; 0,5.

4.9. Regula de trei simplă. Regula de trei compusă

Regula de trei simplă

Vom considera probleme în care intervin două mulțimi de câte două numere între care există o proporționalitate directă sau o proporționalitate inversă, iar unul din numerele unei mulțimi este necunoscut.

Procedeul care se folosește pentru determinarea numărului necunoscut dintr-una din două mulțimi, alcătuite fiecare din câte două elemente, între care există o proporționalitate directă sau inversă, se numește regula de trei simplă.

Aplicarea acestui procedeu, numit regula de trei simplă, pornește de la așezarea datelor problemei într-o schemă, care conduce la aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporție (în cazul mărimilor direct proporționale) sau la aflarea unui factor necunoscut al unui produs, când cunoaștem produsul și celălalt factor (în cazul mărimilor invers proporționale). Practic, schema conduce la rezolvarea unei ecuații cu o singură necunoscută.

Model 1. 18kg de mere costă 126000lei. Cât costă 13kg de mere de aceeaşi calitate?

Soluție. Această problemă poate fi rezolvată prin metoda reducerii la unitate:

1) Aflăm prețul unui kilogram de mere. 126000:18=7000lei.

2) Aflăm prețul a 13kg de mere. 7000·13=91000lei.

Prin regula de trei simplă, datele problemei se aşează astfel:

18kg mere.............................126000lei
13kg mere............................. x

Această schemă se citeşte: "Dacă 18kg de mere costă 126000lei, atunci 13kg de mere vor costa x lei".

Stabilim ce fel de proporționalitate există între cele două mulțimi: a cantităților şi a costurilor. Pentru aceasta considerăm mulțimea cantităților $\{18,13\}$ şi mulțimea costurilor $\{126000,x\}$. Între aceste două mulțimi există o proporționalitate directă, deoarece putem forma un şir de rapoarte egale, $\frac{126000}{18}=\frac{x}{13}$, valoarea lor comună fiind tocmai prețul unui kilogram de mere. Apoi aflăm termenul necunoscut al proporției: $x=\frac{126000\cdot 13}{18}$, deci x=91000(lei).

Model 2. 15 muncitori pot termina o lucrare în 20 zile. În câte zile vor termina lucrarea 25 de muncitori?

Soluție. Această problemă poate fi rezolvată prin metoda reducerii la unitate:

1) Aflăm în câte zile termină lucrarea un muncitor. 15·20=300zile.

2) Aflăm în câte zile termină lucrarea 25 muncitori. 300:25=12zile.

Prin regula de trei simplă datele problemei se aşează astfel:

15 muncitori.............................20 zile
25 muncitori............................. x

Această schemă se citeşte astfel: "Dacă 15 muncitori termină lucrarea în 20 de zile, atunci 25 muncitori o vor termina în x zile".

Stabilim ce fel de proporționalitate există între cele două mulțimi: a numărului de muncitori şi a numărului de zile în care ei pot termina lucrarea. Pentru aceasta considerăm mulțimile $\{15,25\}$ şi $\{20,x\}$. Între aceste două mulțimi există o proporționalitate inversă, deoarece putem forma un şir de produse egale $15\cdot 20=25\cdot x$, valoarea lor comună fiind tocmai numărul de zile în care un muncitor poate termina lucrarea. Apoi, aflăm factorul necunoscut: $x=\frac{15\cdot 20}{25}$, deci x=12(zile).

În practică, există obiceiul ca, după determinarea tipului de proporționalitate, modul de aflare a necunoscutei să fie indicat, direct pe schemă, printr-o săgeată care indică înmulțirea şi scrierea literelor "d.p." (pentru proporționalitate directă), respectiv "i.p." (pentru proporționalitate inversă).

Model 1.

d.p.

18kg mere..............................126000lei

13kg mere.............................. x

$$x=\frac{126000\cdot 13}{18}=91000\text{lei}$$

Model 2.

i.p.

15muncitori..............................20zile

25muncitori.............................. x

$$x=\frac{20\cdot 15}{25}=12\text{zile}$$

Probleme rezolvate

R4.9.1. Un motociclist mergând cu viteza de 60km/h străbate o distanță în 48minute. Cu ce viteză trebuie să meargă pentru a parcurge aceeaşi distanță în 45minute?

Soluție. Efectuăm transformările:

$$48\min=\frac{48}{60}\text{ h}=\frac{4}{5}\text{ h, }45\text{min}=\frac{45}{60}\text{ h}=\frac{3}{4}\text{ h.}$$

Prin regula de trei simplă, datele problemei se aşează astfel:

i.p.

$\frac{4}{5}$ h..............................60km/h

$\frac{3}{4}$ h.............................. x

$$x=\frac{60\cdot\frac{4}{5}}{\frac{3}{4}}=60\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3}=64\text{ (km/h)}$$

R4.9.2. Un muncitor efectuează 130 piese în 4 ore 20 min. Câte piese realizează muncitorul în 8 ore?

Soluție. Efectuăm transformarea: 4 h 20 min= $4\frac{20}{60}\text{ h} = 4\frac{1}{3}\text{ h}$.

Prin regula de trei simplă, datele problemei se aşează astfel:

d.p.

$4\frac{1}{3}$ h.............................130piese

8h x

$$x = \frac{130 \cdot 8}{\frac{13}{3}} = 130 \cdot 8 \cdot \frac{3}{13} = 240 \text{ (piese)}$$

Probleme propuse

P4.9.1. Dacă din 80kg făină se produc 180 pâini, ce cantitate de făină este necesară pentru obținerea a 72 de pâini?

P4.9.2. Trei robinete, având acelaşi debit, umplu un rezervor în 6ore. În cât timp vor umple rezervoarele două robinete cu acelaşi debit?

P4.9.3. Un copil a economisit 15 bancnote de câte 10000lei. Câte bancnote de 50000lei primeşte în schimbul lor?

P4.9.4. Un muncitor face în 6 ore, 108 piese. Dacă lucrează în acelaşi ritm câte piese, de acelaşi fel, face în 5 ore?

P4.9.5. La o fermă se planificase o cantitate de furaje pentru 40 vite pe timp de 60 zile. Pentru câte zile va ajunge aceeaşi cantitate de furaje, dacă s-au mai cumpărat 8 vite?

P4.9.6. Pentru transportul lemnelor de la munte la un depozit s-au comandat 40 de vagoane cu o capacitate de 15t fiecare. S-au folosit, însă, vagoane cu o capacitate de 20t. Câte vagoane au fost necesare?

P4.9.7. O brigadă de 24 de muncitori trebuia să sape 120m de şanț. 4 muncitori nu au lucrat. Câți metri de şanț au săpat ceilalți muncitori?

P4.9.8. La un magazin s-a adus 500 sticle de ulei pentru care trebuia să se încaseze 19.000.000lei. După ce s-au vândut 300 sticle, ce sumă urmează să se încaseze?

P4.9.9. La acoperirea unei podele erau necesari 50m linoleum lat de 0,75m. Câți metri linoleum sunt necesari pentru acoperirea aceleiaşi podele, dacă se foloseşte linoleum lat de 1,2m?

P4.9.10. Din 120kg apă de mare se obțin 300g sare. Ce cantitate de apă de mare este necesară pentru a obține 15kg sare?

Răspunsuri

R: P4.9.1. 32kg făină
R: P4.9.2. 9 ore
R: P4.9.3. 3 bancnote
R: P4.9.4. 90 piese
R: P4.9.5. 50 zile
R: P4.9.6. 30 vagoane
R: P4.9.7. 100m
R: P4.9.8. 7.600.000lei
R: P4.9.9. 31,25m
R: P4.9.10. 6000kg

Regula de trei compusă

Vom considera acum probleme în care intervin mai multe mulțimi de câte două numere, între unele din ele existând o proporționalitate directă, iar între altele o proporționalitate inversă.

Regula de trei compusă este un procedeu de aflare a unui număr necunoscut, într-o problemă în care intervin mai multe mărimi, cu câte două valori, între unele existând o proporționalitate directă, iar între altele o proporționalitate inversă.

Aplicarea acestui procedeu, numit regula de trei compusă, porneşte de la aşezarea datelor problemei într-o schemă; apoi, se stabilesc tipurile de proporționalitate ce există între mărimea necunoscută şi fiecare din celelalte mărimi, indicându-se înmulțirea prin săgeți, iar în final se efectuează înmulțirile şi împărțirile ce conduc la aflarea numărului necunoscut. La acest procedeu s-a ajuns datorită modului de rezolvare a acestui tip de probleme cu ajutorul aplicării succesive a regulii de trei simplă.

Model. Cinci muncitori pot termina o lucrare în 15zile, dacă lucrează câte 8ore pe zi. În cât timp vor termina aceeaşi lucrare 10 muncitori, lucrând câte 6ore pe zi?

Soluție. Datele problemei se aşează după următoarea schemă:

5 muncitori.............................8h/zi.............................15zile
10muncitori.............................6h/zi............................. x

Pentru a avea doar două mărimi şi a putea aplica, astfel, regula de trei simplă, considerăm constant numărul muncitorilor şi problema se transformă în:

i.p.
5 muncitori.............................8h/zi.............................15zile

5 muncitori.............................6h/zi............................. y

$$y = \frac{15 \cdot 8}{6} = 20 \text{ (zile)}$$

Deci, 5 muncitori, lucrând câte 6 ore pe zi termină lucrarea în 20 de zile. Acum numărul de 6h/zi, fiind constant, trebuie să aflăm în cât timp vor termina lucrarea cei 10 muncitori:

i.p.

5 muncitori.............................6h/zi.............................20zile

10muncitori.............................6h/zi............................. x

$$x = \frac{20 \cdot 5}{10} = 10 \text{ (zile)}$$

Practic, regula de trei compusă cuprinde următoarele etape:

1) Aşezarea datelor problemei în schemă:

5 muncitori.............................8h/zi.............................15zile
10muncitori.............................6h/zi............................. x

2) Stabilirea tipului de proporționalitate ce există între mulțimea ce conține necunoscuta şi, succesiv, celelalte mulțimi:

- între mulțimea zilelor şi cea a muncitorilor există o proporționalitate inversă
- între mulțimea zilelor şi cea a orelor de lucru zilnic există o proporționalitate inversă.

Precizăm aceste proporționalități prin săgeți, pe schemă:

i.p.

i.p.

5 muncitori.............................8h/zi.............................15zile

10muncitori.............................6h/zi............................. x

$$x = \frac{15 \cdot 5 \cdot 8}{10 \cdot 6} = 10 \text{ (zile)}$$

Remarcă. Aceeaşi problemă se poate rezolva prin metoda reducerii la unitate făcând următorul raționament: dacă 5 muncitori, lucrând câte 8h/zi, termină lucrarea în 15zile, atunci 1muncitor, lucrând câte 8h/zi, termină lucrarea în $5 \cdot 15$zile. Rezultă că 1muncitor, lucrând câte o oră pe zi, termină lucrarea în $5 \cdot 15 \cdot 8$zile. Rezultă, în continuare, că un muncitor, lucrând câte 6h/zi, va termina lucrarea în $\frac{5 \cdot 15 \cdot 8}{6}$ zile.

Deci, 10muncitori, lucrând câte 6h/zi, va termina lucrarea în $\frac{5\cdot 15\cdot 8}{6\cdot 10}$ zile, adică în 10zile. Acest raţionament se aşează sub forma următoarei scheme:

5muncitori..........................8h/zi.........................15zile
10muncitori........................6h/zi......................... x

---

1muncitor..........................8h/zi.........................$15\cdot 5$
1muncitor..........................1h/zi.........................$15\cdot 5\cdot 8$
1muncitor..........................6h/zi......................... $\frac{15\cdot 5\cdot 8}{6}$
10muncitori........................6h/zi......................... $\frac{15\cdot 5\cdot 8}{6\cdot 10}=10$ zile

Probleme rezolvate

R4.9.3. Într-o tabără, în 12zile, 150 de elevi consumă 900kg pâine. Ce cantitate de pâine este necesară pentru 70 de elevi, pentru 18 zile?

Soluţie. 1) Aşezarea datelor problemei în schemă

150elevi.............................12zile.............................900kg
70elevi...............................18zile............................. x

2) Stabilirea tipului de proporţionalitate ce există între mulţimea ce conţine necunoscuta şi, succesiv, celelalte mulţimi, precizând aceste proporţionalităţi prin săgeţi, pe schemă:

150elevi.............................12zile.............................900kg
d.p. d.p.
70elevi...............................18zile............................. x

---

$$x=\frac{900\cdot 70\cdot 18}{150\cdot 12}=630\text{ kg}$$

R4.9.4. 6 muncitori pot termina o lucrare în 12zile. După 4zile de lucru echipei de muncitori i se alătură încă 2 muncitori. În cât timp se va executa toată lucrarea?

Soluţie. Dacă echipa poate termina lucrarea în 12zile, atunci după 4zile de lucru echipa a efectuat $\frac{4}{12}$, adică $\frac{1}{3}$ din lucrare. Deci, trebuie să aflăm în câte zile 8 muncitori fac $\frac{2}{3}$ din lucrare.

Aşezăm datele problemei şi stabilim tipul de proporţionalitate ce există între mulţimea ce conţine necunoscuta şi, succesiv, celelalte mulţimi, precizând aceste proporţionalităţi prin săgeţi, pe schemă:

i.p.

6muncitori..............................1lucrare..............................12zile

d.p.

8muncitori.............................. $\frac{2}{3}$ lucrare.............................. x

---

$$x = \frac{12 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3}}{8 \cdot 1} = 6\,\text{zile}$$

Lucrarea s-a efectuat în 4zile+6zile, deci în 10zile.

R4.9.5. O echipă de 20 muncitori, lucrând câte 6ore pe zi, pot face 24piese în 10zile. Câte zile sunt necesare pentru ca o altă echipă de 15 muncitori să facă 360piese, lucrând câte 8ore pe zi?

Soluţie. Aşezăm datele problemei în schemă şi stabilim tipul de proporţionalitate ce există între mulţimea ce conţine necunoscuta şi, succesiv, celelalte mulţimi, precizând aceste proporţionalităţi prin săgeţi, pe schemă:

i.p.

i.p.

20muncitori....................6h/zi....................240piese....................10zile

d.p.

15muncitori....................8h/zi....................360piese.................... x

---

$$x = \frac{10 \cdot 20 \cdot 6 \cdot 360}{15 \cdot 8 \cdot 240} = 15\,\text{zile}$$