8. Modulul unui număr real. Ecuații cu module

Pentru definirea noțiunii de modul a unui număr real (sau valoarea absolută a unui număr real) vom da o exprimare algebrică. Modulul folosindu-se adesea în stabilirea distanței dintre două puncte situate pe o dreaptă, vom da o exprimare geometrică a noțiunii de modul.

8.1. Definiția modulului unui număr real

Definiția 1. Modulul unui număr pozitiv este egal cu acel număr.
Definiția 2. Modulul unui număr negativ este egal cu opusul lui.
Definiția 3. Modulul lui zero este egal cu zero.

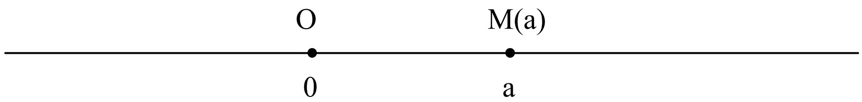
Putem scrie:

$$(\forall)\ x\in R,\ |x| = \begin{cases} x, \text{dacă } x > 0 \\ 0, \text{dacă } x = 0 \\ -x, \text{dacă } x < 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad |x| = \begin{cases} x, \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Dacă notăm cu E(x) o expresie algebrică care conține pe x (şi ne propunem să o studiem în raport cu variabila x) atunci:

$$|E(x)| = \begin{cases} E(x), \text{dacă } E(x) \geq 0 \\ -E(x), \text{dacă } E(x) < 0 \end{cases}$$

Considerăm punctele M(a), punctul M de abscisă a, situat pe axa numerelor reale:



Definiția 4. Distanța, măsurată pe axa numerelor reale, de la origine la punctul M(a) se numeşte modulul numărului real a.

Deci: $d(O,M) = OM = |a|$, $a\in R$

Considerăm punctele $A(x_1)$ şi $B(x_2)$ pe axa numerelor reale:

Distanța dintre aceste două puncte se exprimă astfel:

$d(A,B) = AB = |x_1 - x_2|$

8.2. Proprietățile modulului unui număr real

1. $(\forall)\ x\in R,\ |x| \geq 0.$
2. $(\forall)\ x,y \in R,\ |x \cdot y| = |x|\cdot|y|.$

   Această proprietate o putem generaliza:

   $(\forall)\ x_1, x_2, \dots, x_n\in R,\ |x_1, x_2, \dots, x_n| = |x_1|\cdot|x_2|\cdot\dots\cdot|x_n|$

   Consecințe:

   $(\forall)\ x\in R,\ |-x| = |x|,$

   $(\forall)\ x\in R,\ |x|^2 = x^2.$
3. $(\forall)\ x,y\in R,\ y\neq 0,\ \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
4. $(\forall)\ x,y\in R,\ |x + y| \leq |x| + |y|$

   Această proprietate o putem generaliza:

   $(\forall)\ x_1,x_2,\dots,x_n\in R:\ |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$
5. Dacă $x\in R$ şi $a>0$: $|x| = a \Leftrightarrow x = -a$ sau $x = a$
6. Dacă $x\in R$, $a>0$: $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
7. Dacă $x\in R$, $a>0$: $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ sau $x > a$

Probleme rezolvate

R8.1.1. Să se calculeze:

a) $\dfrac{|2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\ldots\cdot 2^{100} - 4^{2526}| - 16^{1263} + 2^{5049}}{2^{5049}}$

b) $\left\{2^{2997} - 3^{1998}| - |3^{1998} - 5^{1332}| - \left(-5^{111}\right)^{12}\right\} : \left(-2^{599}\right)^5$

[C.M.2001]

Soluție.

a) $\frac{\left|2^{5050}-2^{5052}\right|-2^{5052}+2^{5049}}{2^{5049}}=\frac{2^{5052}-2^{5050}-2^{5052}+2^{5049}}{2^{5049}}=$

$=\frac{2^{5049}(-2+1)}{2^{5049}}=-1$

b) $\left|2^{1997}-3^{1998}\right|=\left|8^{999}-9^{999}\right|=9^{999}-8^{999}=3^{1998}-2^{2997}$,

$\left|3^{1998}-5^{1332}\right|=\left|729^{333}-625^{333}\right|=729^{333}-625^{333}=3^{1998}-5^{1332}$

Înlocuind în expresia dată, obținem:

$\left(3^{1998}-2^{1997}-3^{1998}+5^{1332}-5^{1332}\right):\left(-2^{2995}\right)=\left(-2^{2997}\right):\left(-2^{2995}\right)=4$

R8.1.2. Să se determine numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_{1997}$ astfel încât $x_1+x_2+\dots+x_{1997}=1997$ şi

$\left|x_1-x_2\right|=\left|x_2-x_3\right|=\dots=\left|x_{1996}-x_{1997}\right|=\left|x_{1997}-x_1\right|$

[C.M 1997]

Soluție.

Notăm $\left|x_1-x_2\right|=k$, atunci

$x_1-x_2=k$, $x_2-x_3=k$, ... , $x_{1996}-x_{1997}=k$, $x_{1997}-x_1=k$;

sau

$x_1-x_2=-k$, $x_2-x_3=-k$, ... , $x_{1996}-x_{1997}=-k$, $x_{1997}-x_1=-k$.

Adunăm egalitățile şi obținem: $0=k$ sau $0=-k$, deci

$\left|x_1-x_2\right|=\left|x_2-x_3\right|=\dots=\left|x_{1996}-x_{1997}\right|=0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow x1=x2=\dots=x1997\\ \text{dar } x_1+x_2+\dots+x_{1997}=x_{1997}\end{array}\right\}\Rightarrow x_1=x_2=..=x_{1997}=1$$

R8.1.3. Fie $x,y,z\in R$, $x+y+z=4$. Arătați că:

a) $|x-1|+|y-2|+|z-3|\geq 2$,

b) $|x-1|+\frac{|y|+|y-2|}{2}\geq 1$

[C.M 2001]

Soluție.

a) Vom folosi inegalitatea $|a+b+c|\leq|a|+|b|+|c|$, $(\forall)a,b,c\in R$

$$|x-1|+|y-2|+|z-3| \geq |x-1+y-2+z-3| = |x+y+z-6| =$$
$$= |4-6| = 2 \Rightarrow |x-1|+|y-2|+|z-3| \geq 2$$

b) $|x-1|+\dfrac{|y|+|y-2|}{2} \geq 1 \Leftrightarrow 2|x+1|+|y|+|y-2| \geq 2$

Demonstrăm că această inegalitate este adevărată folosindu-ne de punctul a).

$$2|x+1|+|y|+|y-2| = |x-1|+|y-2|+|x-1|+|y| \geq |x-1|+|y-2|+|x+y-1| =$$
$$=|x-1|+|y-2|+|z-3| \geq 2$$

R8.1.4. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\sqrt{x^2-2\left(\sqrt{2}x-1\right)}+\left|x^2-2\right| = 0,$

b) $\left|\dfrac{2x-3}{x+1}\right|-|2x-3| = 0,$

c) $\left||3x-1|+2\right| = 4.$

Soluție.

a) Amintim egalitatea $\sqrt{a^2} = |a|$, $(\forall)a \in R$

Atunci $\sqrt{x^2-2\left(\sqrt{2}x-1\right)} = \sqrt{x^2-2\sqrt{2}x+2} = \sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2} = |x-2|$

Ecuația devine

$$\left|x-\sqrt{2}\right|+\left|x^2-2\right| = 0 \Leftrightarrow \left|x-\sqrt{2}\right|+\left|\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\right| = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|x-\sqrt{2}\right|+\left|x-\sqrt{2}\right|\cdot\left|x+\sqrt{2}\right| = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|x-\sqrt{2}\right|\left(1+\left|x+\sqrt{2}\right|\right) = 0 \Rightarrow \left|x-\sqrt{2}\right| = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2},\ S = \left\{\sqrt{2}\right\}$$

b) $\dfrac{|2x-3|}{|x+1|}-|2x-3| = 0 \Leftrightarrow |2x-3|\left(\dfrac{1}{|x+1|}-1\right) = 0 \Leftrightarrow |2x-3| = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Facem observația că $\dfrac{1}{|x+1|}-1 < 0\ (\forall)x \in R \setminus \{-1\}$.

c) $\left||3x+1|+2\right| = 4 \Leftrightarrow |3x+1|+2 = 4$ sau $|3x+1|+2 = -4$

Rezolvăm ecuația

$|3x+1|+2 = 4 \Leftrightarrow |3x+2| = 2 \Leftrightarrow 3x+2 = 2$ sau $3x+2 = -2 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = -\dfrac{4}{3}$

Rezolvăm a doua ecuație

$|3x+1|+2=-4 \Leftrightarrow |3x+1|=-2$, ecuație imposibilă

Soluția finală este $S=\left\{0, -\dfrac{4}{3}\right\}$

R8.1.5. Să se afle numerele $x_1, x_2, ..., x_n$ care verifică egalitatea:
$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2-2(|x_1|+|x_2|+...+|x_n|)+n=0$, $n\in N^*$.
Soluție.
$$x_1^2-2|x_1|+1+x_2^2-2|x_2|+1+...+x_n^2-2|x_n|+1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (|x_1|-1)^2+(|x_2|-1)^2+...+(|x_n|-1)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x_1|-1=|x_2|-1=...=|x_n|-1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x_1|=|x_2|=...=|x_n|=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1, x_2, ..., x_n \in \{-1, 1\}.$$

R8.1.6. Determinați valorile naturale ale lui a pentru care ecuația $\big|\, a+|x-a|\,\big|=3$ are două rădăcini întregi. Rezolvați în acest caz ecuația.
Soluție.
$\big|\, a+|x-a|\,\big|=3 \Leftrightarrow |x-a|+a=3$ sau $|x-a|+a=-3$.
Ecuația $|x-a|+a=-3$ este imposibilă dacă $a\in N$.
Atunci: $|x-a|+a=3 \Leftrightarrow |x-a|=3-a$, are două rădăcini întregi dacă $3-a>0 \Rightarrow$ $a<3$ și $a\in N \Rightarrow a\in\{0, 1, 2\}$.
Dacă a = 0, $||x||=3 \Leftrightarrow |x|=3 \Leftrightarrow x\in\{-3,3\}$.
Dacă a = 1, $|1+|x-1||=3 \Leftrightarrow |x-1|=2$ sau $|x-1|=-4$ ecuație imposibilă
$\Rightarrow |x-1|=2 \Leftrightarrow x\in\{-1,3\}$.
Dacă a = 2, $|2+|x-2||=3 \Leftrightarrow |x-2|=1$ sau $|x-2|=-5$ ecuație imposibilă
$\Rightarrow |x-2|=1 \Leftrightarrow x\in\{1,3\}$.

R8.1.7. Să se arate că ecuația
$|x-a|+|x-b|+|x+a|+|x+b|=|a+b|$, $a, b\in R_+$
nu are rădăcini reale.
Soluție.
Folosim inegalitatea: $|a+b|\le|a|+|b|$, $(\forall)a, b\in R$
și egalitatea $|a|=|-a|$, $(\forall)a\in R$.
$|x-a|+|x+a|=|x-a|+|-x-a|\ge|x-a-x-a|=|-2a|=2|a|$
Analog $|x-b|+|x+b|\ge 2|b|$.
Adunând inegalitățile, obținem:
$|x-a|+|x+a|+|x-b|+|x+b|\ge 2|a|+2|b|=2(|a|+|b|)\ge 2|a+b|>|a+b|$,
deci nu poate avea loc egalitate pentru orice $x\in R$.