6. Poliedre

În cele ce urmează vom prezenta poliedrele regulate împreună cu aplicații reprezentative pentru fiecare. Considerăm definițiile poliedrelor cât şi formulele de calcul împreună cu proprietățile lor cunoscute.
Se doreşte dezvoltarea abilităților pur geometrice cât şi îmbinarea cu tehnici metrice.

Problemele propuse sunt exemplele vii de aplicații întâlnite la diferite etape ale concursurilor şcolare.

6.1 Poliedre regulate

Definiție: Se numeşte poliedru regulat un poliedru convex (nici un plan al unei fețe nu taie corpul), la care fețele sunt poliedre regulate egale.

Cubul, tetraedru regulat sunt poliedre regulate, deci definiția nu este lipsită de conținut.

Observații:

1) Unghiurile poliedre ale poliedrului regulat sunt congruente.
2) Un poliedru regulat poate fi înscris într-o sferă. Justificare: să considerăm două fețe având muchia comună AB. Perpendicularele pe aceste fețe, duse prin centrele poligoanelor respective sunt concurente în O. Rezultă OA=OB=OC=OD, deci O este centrul unei sfere care trece prin A,B,C,D. Parcurgând toate fețele poliedrului din aproape în aproape sfera rămâne aceeaşi.

Deducem usor

3) Un poliedru regulat poate fi circumscris unei sfere.

Prezentăm fără demonstrație un rezultat important prin consecința sa:

Teorema lui Euler: dacă V,M,F reprezintă respectiv numărul vârfurilor, muchilor şi fețelor unui poliedru convex atunci V+M-F=2.

Cosecință: există 5 tipuri de poliedre regulate

Demonstrație: Fie m –numărul muchiilor ce pornesc din acelaşi vârf şi l – numărul laturilor unei fețe; m,l≥3. Deducem numărul total al muchiilor care este:

$$M=\frac{1}{2}l\cdot F \text{ sau } M=\frac{1}{2}m\cdot V$$

Exprimând F şi V din aceste relații şi înlocuind în relația lui Euler F+V=M+2 obținem

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{M}$$

Vom cerceta

a)pentru care valori întregi (pozitive), superioare lui 2, date literelor, această relație este satisfăcută

b)dacă la fiecare soluție găsită corepunde efectiv un poliedru cu datele respective

a) Pentru l≥4, m≥4 obținem $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\leq\frac{1}{2}$ deci relația nu este satisfăcută. Rezultă că trebuie să luăm unul din numerele l,m egal cu 3. Pentru l=3 şi m≥6, obținem

$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ care nu convine. Rămâne să examinăm cazurile l=3, m=3 sau 4 sau 5 şi invers m=3, l=3 sau 4 sau 5.

Obținem următoarele 5 soluții:

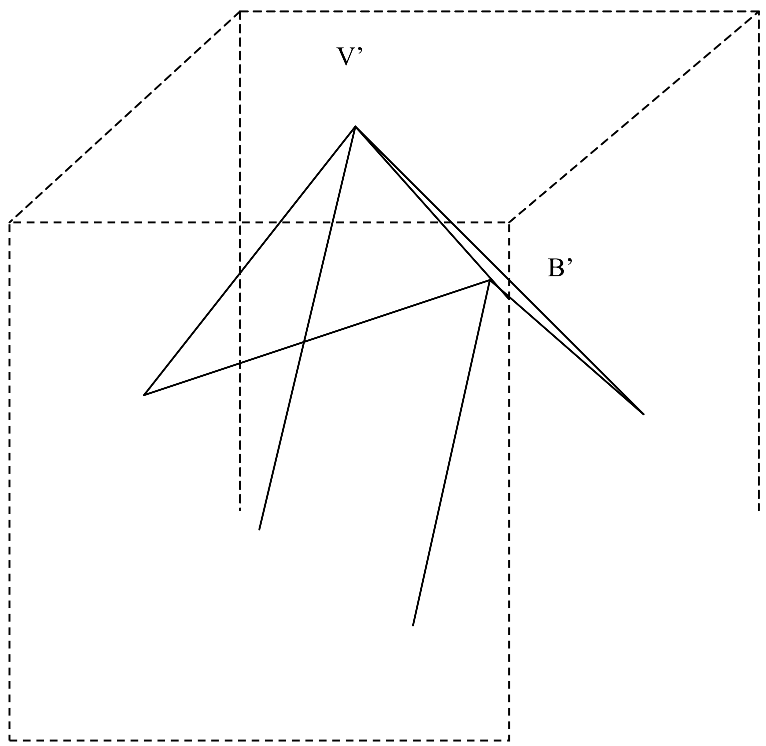
1 l=3, m=3, M=6 de unde F=4, V=4 caz ce corespunde tetraedreului regulat.

2 l=3, m=4, M=12 de unde F=8, V=8 caz ce corespunde octaedrului. Reprezentarea octaedrului imediată se poate realiza unind centrele fețelor unui cub.

3 l=3, m=5, M=30 de unde F=20, V=12 caz ce corespunde icosaedrului. Reprezentarea se realizează analog ca octaedru însă pornind de la poliedrul regulat numit dodecaedru de la cazul 5.

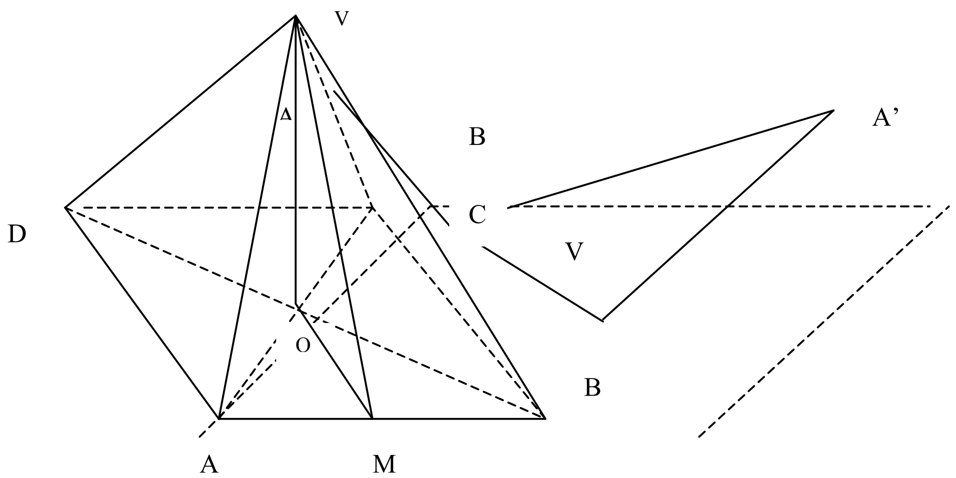
4 l=4, m=3, M=12 de unde F=6, V=8 caz corepunzator cubului.

5 l=5, m=3, M=30 de unde F=12, V=20 caz corespunzător dodecaedrului. Fețele laterale sunt pentagoane regulate.



OCTAEDRU

$$\cos\rho = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



6.2. Prisma

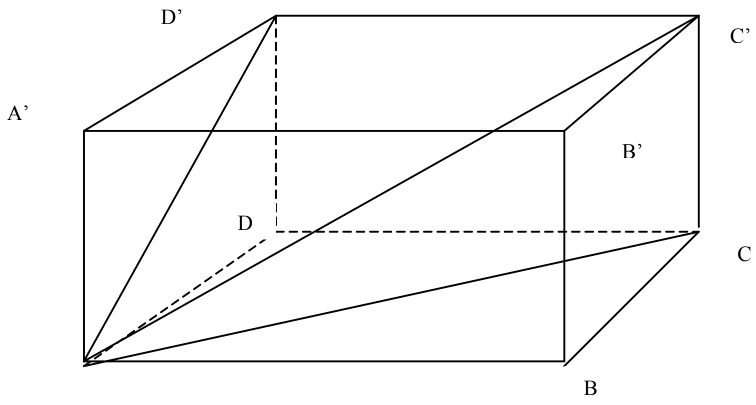
Probleme rezolvate

R62.1 Fie ABCDA'B'C'D' un paralelipiped dreptunghic. Notăm cu α,β,γ unghiurile formate de diagonala [AC'] cu laturile [AB], [AD] şi [AA'], iar cu u,v,w unghiurile formate de AC' cu planele (ABCD), (ABB'A') şi (ADD'A').

Să se arate că:

1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
2) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$
3) $tg^2\alpha + tg^2\beta + tg^2\gamma \geq 6$
4) $\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\gamma} \geq 9$
5) $\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w = 2$
6) $\sin^2 u + \sin^2 v + \sin^2 w = 1$
7) $ctg^2 u + ctg^2 v + ctg^2 w \geq 6$

notăm AB=a; BC=b; CC'=c;



Soluție:

1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2} = 1$

2) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \dfrac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2} = 2$

A

3) $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\gamma = \dfrac{b^2+c^2}{a^2} + \dfrac{a^2+c^2}{b^2} + \dfrac{b^2+a^2}{c^2}$

$= \left(\dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{b^2}\right) + \left(\dfrac{c^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{c^2}\right) + \left(\dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{b^2}\right) \geq 2+2+2 == 6$

4) $\dfrac{b^2+c^2+a^2}{a^2} + \dfrac{b^2+c^2+a^2}{b^2} + \dfrac{b^2+c^2+a^2}{c^2} = 3 + \left(\dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{b^2}\right) + \left(\dfrac{c^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{c^2}\right) +$

$\left(\dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{b^2}\right) \geq 3+2+2+2 = 9$

5) $\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w = \dfrac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2} = 2$

6) $\sin^2 u + \sin^2 v + \sin^2 w = \dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2} = 1$

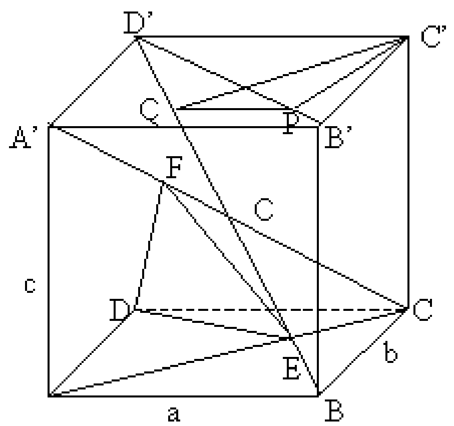
7) ctg²u + ctg²v + ctg²w$=\frac{b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2+c^2}{b^2}+\frac{b^2+a^2}{c^2}=$

$$=\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)+\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2}\right)+\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}\right)\geq 2+2+2=6.$$

R6.2.2. În paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' avem AB=a, BC=b, AA'=c. notăm cu E şi F proiecțiile punctului D pe AC, respectiv, pe A'C şi cu P şi Q proiecțiile punctului C' pe B'D', respective pe BD'. Arătați că planele (DEF) şi (C'PQ) sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $b^2=a^2+c^2$.

(Subiect unic- județeană 2001)

Soluție: Fie A'C ∩ BD'={0}. Avem A'C ⊥ (DEF) si BD'⊥ (C'PQ)⇔ A'C⊥BD' de unde ΔBOC este dreptunghic. De aici $b^2=a^2+c^2$ şi reciproc.



R6.2.3.Fie ABCDA'B'C'D' paralelipiped dreptunghic. Fie G mijlocul segmentului (AB') şi {E}=A'C ∩ (AB'D'). Dacă EG⊥AB' arătați că ABCDA'B'C'D' este cub.

(Etapa finală ARAD-1994)

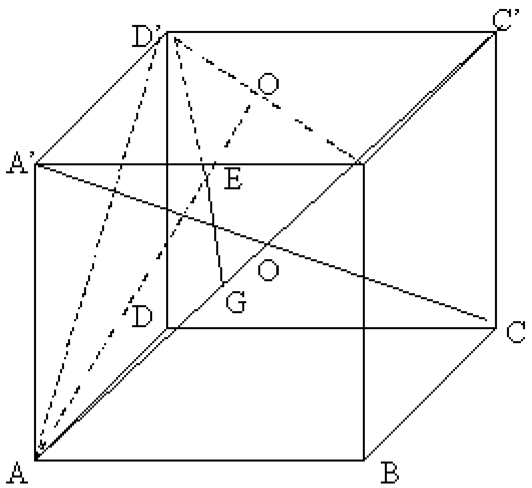
Soluție: Fie {O}=A'C' ∩ B'D' şi AB=a, BC=b, CC'=c. Rezultă imediat că {E}=AO ∩ AC'. În triunghiul ADB', AO şi D'G sunt mediane deci E este centrul de greutate al triunghiului AD'B'. Dar EG ⊥ AB', deci ΔAB'D' este isoscel cu (AD')=(BD') de unde rezultă că $\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{a^2+b^2}$ echivalent cu $a=c$ şi cu ABB'A' pătrat. De aici, AB' ⊥ A'B, dar AB' ⊥ BC deci AB' ⊥ (A'BC) şi cum GE ⊥ A'C iar A'C, EGC

(A'BC) din T3⊥ avem că AE ⊥ A'C de unde $A'E = \frac{AA'^2}{A'C} = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ şi

$$EC = \frac{AC^2}{A'C} = \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad ①$$

Dar A'O || AC implică ΔA'EO ~ ΔCEA echivalent cu $\frac{OA'}{AC} = \frac{A'E}{EC} = \frac{1}{2}$ ②.

Din ① şi ② rezultă că $\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{2}$ de unde $a^2+b^2 = 2c^2$ şi cum $a = c$ avem că $b = c$, deci ABCDA'B'C'D' – cub.



R6.2.4. Fie N, P centrele feţelor ABB'A' respectiv ADD'A' ale unui paralelipiped dreptunghic ABCDA'B'C'D' şi M∈(A'C), astfel încât A'M=1/3 din A'C. să se demonstreze că MN⊥AB' şi MP⊥AD, dacă şi numai dacă paralelipipedul este cub.

(Etapa naţională, 1996)

Soluţie: Fie AO'∩A'C={G}, unde O' este centrul feţei A'B'C'D'. Deducem că ΔA'GO'≈ΔCGA de unde rezultă A'G=1/2din GC rezultă că G=M, deci M ∈(AO'). Analog se arată că MO'=1/3din AO'. Deci M este centrul de greutate al ΔAB'D'.
Dacă MN⊥AB' şi MP⊥AD', atunci medianele [D'N] şi [B'P] sunt înălţimi în ΔAB'D', rezultă ΔAB'D' este echilateral. ΔAA'B' ≡ Δ ≡ ΔD'A'A' (C.I.) rezultă AA'=A'B'=A'D'.

R6.2.5. Fie cubul ABCDA'B'C'D' cu muchia de lungime a. Se consideră punctele K∈[AB], L∈[CC'], M∈[D'A'].

a). arătaţi că $\sqrt{3}$ KL>=KB+BC+CL.

b). Arătaţi că perimetrul triunghiului KLM este mai mare strict decât 2a$\sqrt{3}$.

(Etapa judeţeană, 2002)

Soluție:

a) Avem $KL^2 = LC^2 + CK^2 = LC^2 + CB^2 + BK^2$.

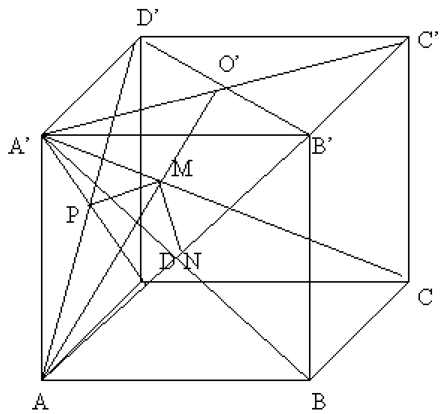
Cum $3(x^2+y^2+z^2) >= (x+y+z)^2$, oricare ar fi $x,y,z \in R$, rezultă $3KL = 3(KB^2+BC^2+CL^2) > (KB+BC+CL)^2$, adică $\sqrt{3}$ KL>=KB+BC+CL.

b). Se obțin inegalitățile: $\sqrt{3}$ ML>=LC'+C'D'+D'M, $\sqrt{3}$ MK>=MA'+A'A+AK. Prin însumarea lor cu inegalitatea demonstrată la punctul a) obținem:

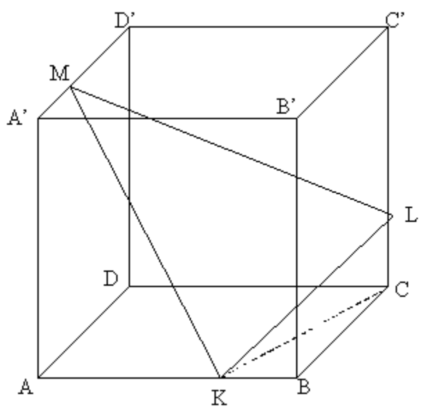
$\sqrt{3}$ (KL+LM+MK)>=(KB+AK)+(CL+LC')+(D'M+MA')+BC+C'D'+A'A=6a de unde KL+LM+MK>= $\frac{6a}{\sqrt{3}}$ =2a $\sqrt{3}$.

Egalitatea nu poate avea loc. Justificarea se face prin reducere la absurd. În caz contrar k de exemplu ar fi în B simultan cu A.

Desen pr.6.2.4.



Desen R6.2.5.



6.3.Piramida

6.3.1. Tetraedrul

Definiție: Se numeşte tetraedru echifacial un tetraedru ale cărei fețe au aceeaşi arie.
Să demonstrăm împreună proprietățile (caracterizările) :
P1: un tetraedru este echifacial dacă şi numai dacă cele patru înălțimi ale sale sunt congruente.
P2: Într-un tetraedru echifacial muchiile opuse sunt egale, iar bimedianele sunt perpendicularele comune a două muchii opuse.
P3: Cele patru mediane sunt egale.
P4: Suma distanțelor la fețele tetraedrului de la orice punct interior este constantă.
P5: Toate triunghiurile sunt ascuțitunghice.

P6: pentru tetraedrul SABC echifacial cu BC=a, AC=b, AB=c volumul este $\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$

P7: Centrul de greutate coincide cu centrul sferei circumscrise.
P8: Unghiurile diedre opuse sunt congruente.
P9: Suma unghiurilor plane de la acelaşi vârf este aceeaşi.
P10: Desfăşurarea tetraedrului se face după un triunghi asemenea cu cel al unei fețe.
P11: Centrul sferei înscrise coincide cu centrul sferei circumscrise.
Observație: Se ştie că tetraedrul este corespondentul triunghiului în spațiul cu trei dimensiuni. Dintre toate tetraedrele singurul care permite evidențierea unei multitudini de relații între elementele sale, urmărind cu fidelitate relațiile din geometria triunghiului este tetraedrul echifacial.

Probleme rezolvate

R6.3.1.1. Într-un tetraedru echifacial simetricul piciorului fiecărei înălțimi, față de centrul cercului circumscris feței în care se găseşte, este ortocentrul acestei fețe.

R6.3.1.2. Două tetraedre echifaciale ABCD şi A'B'C'D' sunt înscrise în două sfere concentrice. Fie P un punct al sferei circumscrise tetraedrului ABCD, iar P' un punct al sferei circumscrise tetraedrului A'B'C'D'. Să se arate că are loc relația:
$PA'^2+PB'^2+PC'^2+PD'^2=P'A^2+P'B^2+P'C^2+P'D^2$.

R6.3.1.3 dreptele suport ale medianelor tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ intersectează a doua oară sfera circumscrisă tetraedrului în punctele Bi, i=14.
Indicații:
p1) Exprimăm volumul în patru moduri
p2) Înălțimile corespunzătoare aceleiaşi muchii sunt congruente. Bimediana este perpendiculara comună a muchiilor opuse corespunzătoare, deci congruente

p3) Folosind p2 şi aplicând teorema medianei în spaţiu obţinem că medianele au aceeaşi lungime $\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

p4) Descompunem tetraedrul în patru tetraedre de baze echivalente şi scriem volumul în două moduri

p5) Presupunem contrariul. În cazul u° > 90° desfăşurăm tetraedrul şi reconstituim tetraedrul urmărind suprapunerea feţelor iar în cazul u° = 90° tetraedrul degenerează într-un triunghi

p6) Se duc paralele prin A la BC, prin B la AC şi prin C la AB, obţinând un tetraedru tridreptunghic cu volumul de patru ori mai mare decât ABCD

p7) Distanţele de la vârfuri la centrul de greutate sunt egale cu $\frac{3}{4}$ din mediană adică $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ deci G este centrul sferei circumscrise

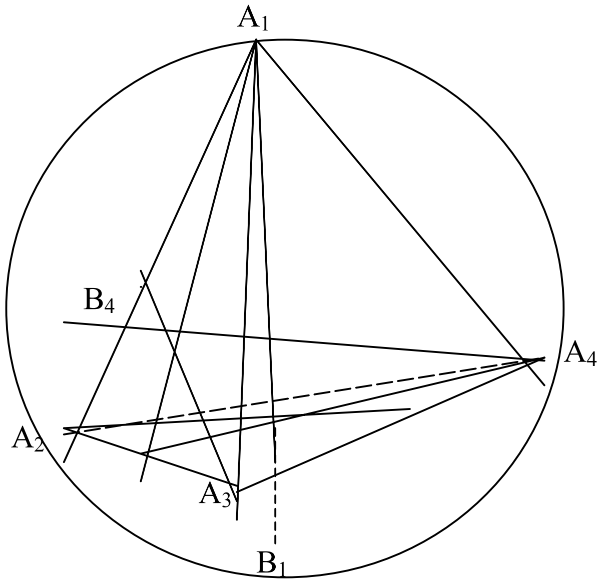
p8) Se pun în evidenţă două triunghiuri dreptunghice congruente cu catete înălţimi din vârfuri opuse

p9) Feţele sunt triunghiuri congruente. Se arată că suma este 180°

p10) Desfăşurarea în planul unei baze va fi un triunghi pentru care triunghiul bază va fi triunghiul median

p11) Deoarece feţele sunt triunghiuri congruente ele sunt înscrise în cercuri congruente din sfera circumscrisă. Însă distanţa de la centrul sferei la cercuri mici congruente este aceeaşi, deci centrul sferei circumscrise va coincide cu centrul sferei închise.

R6.3.1.3.



Soluție:

a) $GA_1 \cdot GB_1 = GA_2 \cdot GB_2 = GA_3 \cdot GB_3 = -\delta(G) = R^2 - OG^2 = \dfrac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{}$

$= \dfrac{1}{3}(GA_1^2 + GA_2^2 + GA_3^2)$

Puterea lui G fata de sfera circumscrisă tetraedrului.

Aplicăm inegalitatea lui Cebâşev

$3 \cdot (GA_1 + GA_2 + GA_3) \leq (GA_1^2 + GA_2^2 + GA_3^2)\left(\dfrac{1}{GA_1} + \dfrac{1}{GA_2} + \dfrac{1}{GA_3}\right) = 3(GB_1 + GB_2 + GB_3)$

În inegalitate are loc egalitatea doar dacă $GA_1 = GA_2 = GA_3$ echivalent cu G=0 deci tetraedru va fi echifacial.

b)$GA_1 \cdot GA_2 \cdot GA_3 \;\; GB_1 \cdot GB_2 \cdot GB_3 | \cdot GA_1 \cdot GA_2 \cdot GA_3$

$GA_1^2 \cdot GA_2^2 \cdot GA_3^2 \leq (GA_1 \cdot GB_1)(GA_2 \cdot GB_2)(GA_3 \cdot GB_3)$ sau

$[2(a_2^2 + a_3^2) - a_1^2] \cdot [2(a_1^2 + a_3^2) - a_2^2] \cdot [2(a_1^2 + a_2^2) - a_3^2] \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2$

Aplicând inegalitatea mediilor, avem că:

$$\sqrt[3]{[2(a_2^2 + a_3^2) - a_2^2][2(a_1^2 + a_3^2) - a_2^2][2(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2]} \leq$$
$$\frac{[2(a_2^2 + a_3^2) - a_1^2] + [2(a_1^2 + a_3^2) - a_2^2] + [2(a_1^2 + a_2^2) - a_3^2]}{3}$$

Se verifică din nou cazul de egalitate echivalent cu G=0.

R6.3.1.4 Se desfăşoară tetraedrul obținându-se perimetrul suma a trei laturi într-un patrulater mai mare strict decât a patra latură de lungime $2 \cdot BC$.

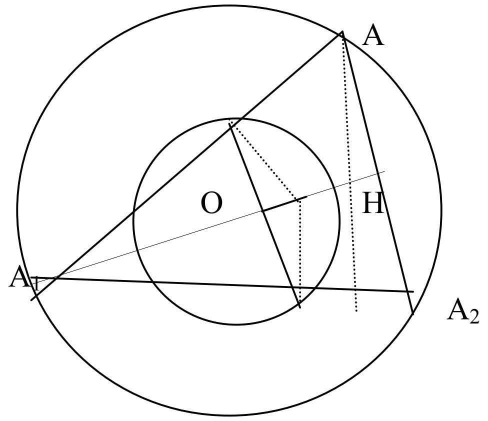
R6.3.1.2 Deoarece tetraedrele sunt echifaciale cu sfere circumscrise concentrice avem G=G'=O=O' şi notând razele celor două cercuri cu R şi R' aplicăm relațiile lui Leibuiz obținând

$$P'A^2 + P'B^2 + P'C^2 = 3P'O^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3(R^2 + R'^2)$$

analog $PA'^2 + PB'^2 + PC'^2 = 3(R^2 + R'^2)$ etc.

R6.3.1.1 Enunț: Fie ABCD un tetraedru echifacial. Notăm cu A' proiecția punctului A pe planul (BCD). Demonstrați că H este simetricul ortocentrului triunghiului BCD față de centrul cercului circumscris ΔBCD.

Soluție: Desfăşurăm tetraedrul în planul (BCD). Ortocentrul ΔBCD este centrul cercului circumscris ΔAA_1A_2 Proiecția lui A pe planul (BCD) coincide cu ortocentrul ΔAA_1A_2. Centrul cercului circumscris ΔBCD este centrul cercului lui Euler asociat ΔAA_1A_2 Se cunoaşte că centrul w este mijlocul segmentului OH.



Unghiul a două muchii opuse într-un tetraedru

R6.3.4. Se consideră ABCD un tetraedru şi δ unghiul format de dreptele AC şi BD.

Să se arate că are loc relaţia:

2 AC· BD| cosδ|=|AD^2+BC^2-AB^2-CD^2|

Soluţie: R6.3.4.

Se consideră punctul E−∈ (ABC) astfel încât ACBE paralelogram şi

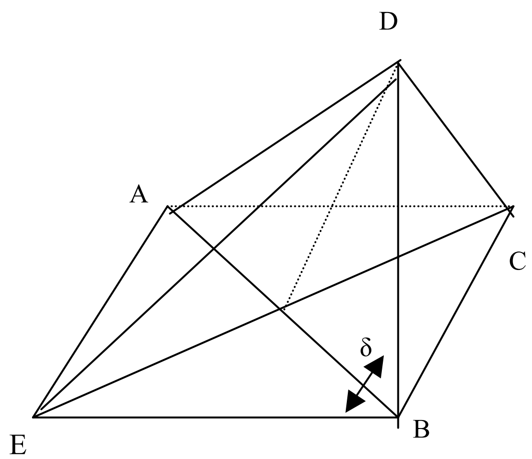
AB∩EC={O}. În ΔDEC şi ΔDAB se aplică teorema medianei

pentru DO şi se egalează.

Rezultă DE^2=AD^2+BD^2+BC^2+AC^2-AB^2-CD^2

Teorema cosinusului aplicată În ΔDBE combinată cu

Expresia lui DE^2 dau relaţia dorită:



$$\cos\delta=\frac{BD^2+EB^2-ED^2}{2BD\ EB}$$

2BD· AC cosδ=BD^2+AC^2-AD^2-BD^2-BD^2-AC^2+AB^2+CD^2

2BD· AC cosδ=AB^2+CD^2-AD^2-BC^2

<u>Definiţie:</u>

Se numeşte <u>tetraedru ortocentric</u> un tetraedru în care muchiile opuse sunt perpendiculare

Exemplu de tetraedru ortocentric: secţiunea determinată de un plan într-un triedru tridreptunghic este baza unui tetraedru ortocentric.

Proprietăţi şi caracterizări ale tetraedrului ortocentric

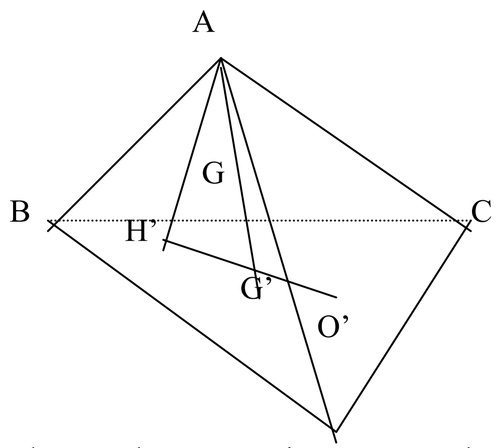
P1. ABCD tetraedru ortocentric dacă şi numai dacă:

(1)$AB \perp CD$; $AC \perp BD$; (este suficient numai două perechi de muchii să fie perpendiculare)
(2)$AB^2+BC^2=AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$;
(3)$[MN] \equiv [PQ] \equiv [RS]$ unde M,N,P,Q,R,S mijloacele muchiilor [AB],[CD],[BC],[AD], [AC],[BD];
(4)$DA \cdot BD \cdot \cos(ADB)=DB \cdot DC \cdot \cos(BCD)=DC \cdot DA \cdot \cos(CDA)$
(5)proiecția unui vârf pe fața oopusă coincide cu ortocentrul acelei fețe.
P2. Se numeşte biînălţime a unui tetraedru perpendiculara comună a două muchii opuse. Demonstrați că biînălțimile într-un tetraedru ortocentric sunt concurente în ortocentrul tetraedrului.
P3 Bimedianele unui tetraedru ortocentric sunt congruente.
P4 Mijloacele muchiilor unui tetraedru ortocentric se găsesc pe o sferă cu centrul G şi raza $\frac{1}{4}\sqrt{AB^2+CD^2}$ numită sfera lui Vogt a tetraedrului ortocentric.
P5 Într-un tetraedru ortocentric ortocentrul, centrul de greutate şi centrul sferei circumscrise tetraedrului sunt coliniare.
P6 Într-un tetraedru ortocentric centrul de greutate al tetraedrului se proiectează in centrele cercurilor lui Euler ale fețelor.

P1(1)Se arată că $BC \perp (AA_1D)$ unde $A_1=pr_{(BCD)}A$
(2) Se consideră M,P,N,Q,R,S mijloacele muchiilor [AB],[BC],[CD],[DA],[AC],[BD] respectiv MPNQ dreptunghi. Din egalitatea diagonalelor rezultă $MP^2+PN^2=RQ^2+QS^2$ şi folosind apoi proprietatea liniei mijlocii rezultă concluzia. De aici rezultă şi P3 şi (3).
(4)Aplicăm teorema cosinusului şi folosim (2).
(5)Din demonstrația (1).
P2 Este suficient să se demonstreze că două câte două înălțimile sunt concurente.

De exemplu AA_1 şi BB_1; $CD \perp (AA_1B)$. Dar $(AA_1B) \cap (BB_1A)=AB$ deci au dreaptă comună.
Din unicitatea planului perpendicular pe o dreaptă dată într-un punct rezultă că $(AA_1B)=(BB_1A)$, deci AA_1 şi BB_1 sunt concurente.
P5 H,G,O se află în planul perpendicular pe fața (BCD) după dreapta lui Euler a ΔBCD si analog se află în planul perpendicular pe fața (ABC) după dreapta lui Euler a ΔABC
P4 Din configurația de la P1 şi P2.
P6 Fie tetraedrul [ABCD], şi H',G',O' ortocentrul, centrul de greutate şi centrul cercului circumscris al ΔBCD, [H'G']=2/3 H'O', mediana AG' a tetraedrului, $G \in$ [AG'] centrul de greutate al tetraedrului (AG'=4GG') şi fie G'' proiecția lui G pe planul (BCD). Evident G" $\in$[H'O']. Se va demonstra că G" mijlocul segmentului [H'O'], deci este centrul cercului lui Euler al feței (BCD).

$\Delta AH'G' \sim \Delta GG''G'$ avem $G'G''/G'H'=G'H/G'A=\frac{1}{4}$ de unde $\frac{H'G' - HG''}{G'H'}=\frac{1}{4}$ Se obține (2/3H'O'-H'G")/(2/3H'O')=1/4 şi apoi H'G"=1/2H'O'.



Observație:
Un alt caz particular de tetraedru ortocentric este trapezul tridreptunghic verificând proprietăți speciale.
Definiție: Un tetraedru ortocentric se numeşte tridreptunghic dacă ortocentrul coincide cu un vârf al tetraedrului.
Proprietăți:
1)OABC un tetraedru tridreptunghic cu ortocentrul O. Atunci $A_{[ABC]}^2 = A_{[ABO]}^2 + A_{[BCO]}^2 + A_{[ACO]}^2$

2) $\dfrac{1}{[\mathrm{d}(\mathrm{O};\mathrm{ABC})]^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

Soluții: 1)Notăm muchiile tetraedrului cu a,b,c şi exprimăm fiecare arie;
2)Dem. că OH⊥(ABC), H ortocentrul triunghiului ABC

R6.1.5.Din mijlocul înălțimii piramidei triunghiulare regulate se duc perpendiculare pe o muchie laterală şi pe o față laterală de lungime p respectiv q. Determinați volumul piramidei.

R6.1.6.Să se arate că tetraedrul în care înălțimile sunt congruente iar una dintre ele trece prin ortocentrul feței opuse este regulat.

R6.1.6.Baza unei piramide patrulatere cu vârful în S este paralelogramul ABCD. Arătați că:
a)ABCD dreptunghi⇔$SA^2 + SC^2 = SB^2 + SD^2$
b)Dacă muchiile laterale formează unghiuri egale cu o semidreaptă SO situată în interiorul unghiului triedru SABCD atunci SA+SC=SB+SD.

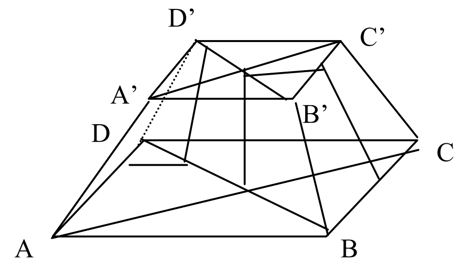
Soluție:
R6.1.6.Fie ABCD tetraedrul, H ortocentrul bazei (BCD) {E}=BH∩CD, B1=$pr_{AE}B$ rezultă BB_1⊥(ACD) iar volumul tetraedrului $S_{BCD}\cdot AH/3=1/6CD\cdot BE\cdot AH=1/3\ S_{ACD}B_1B=$ $1/6CD\cdot AE\cdot BB_1$⇒[BE]≡[AE]. ΔBCE≡ΔACE≡ΔBDE≡ΔADE⇒BC=AC şi BD=AD analog pentru înălțimile din A şi C si A si D

R6.1.7a)Dacă O' este intersecția diagonalelor se aplică teorema medianei in ΔSAC şi ΔSBD.

b)Dacă muchiile laterale fac unghiuri egale cu SO, atunci se ia un plan perpendicular pe SO, care taie muchiile laterale în A_1,B_1,C_1,D_1 când avem S $A_1=SB_1=SC_1=SD_1$. Are loc egalitatea volumelor:

$V_{SB1C1D1}+V_{SA1B1C1}= V_{SA1C1B1}+ V_{SA1D1C1}$, unde

$V_{SB1C1D1}=SB_1 \cdot SC_1 \cdot SD_1/SB \cdot SC \cdot SD\ V_{SBCD}=1/3h(SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1 \cdot SD_1/SA \cdot SB \cdot SC \cdot SD) \cdot SA/SA_1 \cdot S_{BCD}$, unde h este înălţimea piramidei SABCD. Se explicitează analog şi celelalte volume şi cum $S_{BCD}= S_{ABD}=S_{ABC}= S_{ADC}$ rezultă că SA+SC=SB+SD.



R6.1.5 Soluție:Utilizând teorema a II-a a înălțimii în ΔVON respective ΔVOC obținem

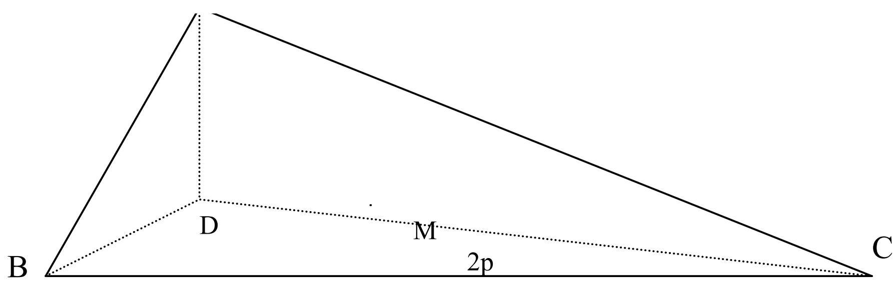
h=$\dfrac{a\sqrt{p^2-q^2}}{\sqrt{(4q^2-p^2)*3}}$ cu a lungimea laturii bazei.

Scriind în două moduri aria ΔVNC obținem a=$\dfrac{4pq}{\sqrt{p^2-q^2}}$

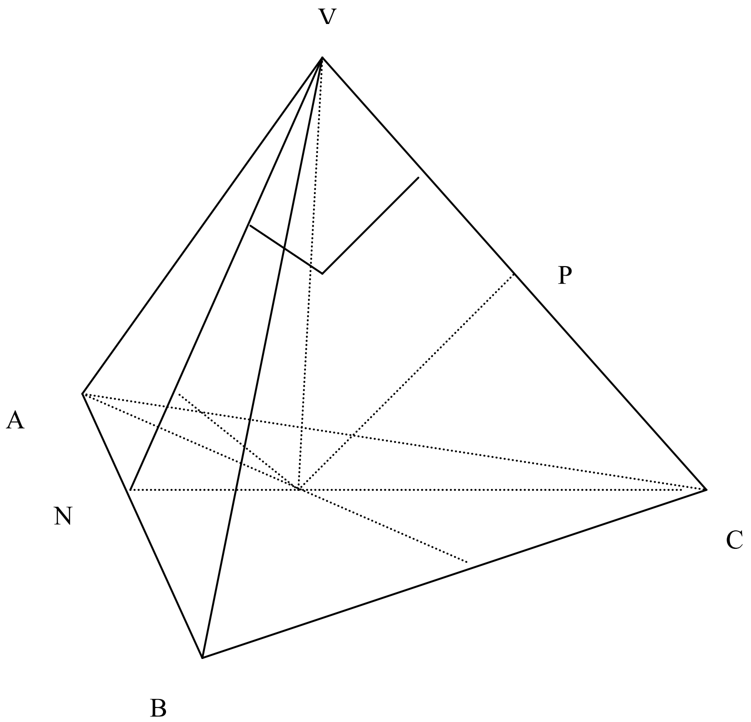
V=$\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}*\dfrac{\sqrt{p^2-q^2}}{\sqrt{3}*\sqrt{4q^2-p^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}*\dfrac{64p^3q^3}{(p^2-q^2)\sqrt{p^2-q^2}}*\dfrac{\sqrt{p^2-q^2}}{\sqrt{3}*\sqrt{4q^2-p^2}}$

Descompunerea ariei se face astfel.

$A_{[VNC]}-A_{[MNC]}=A_{[MNV]}+A_{[VMC]}$.



O



6.4. Trunchiul de piramidă

Probleme rezolvate

R6.4.1. Muchiile laterale ale unui trunchi de piramidă patrulateră regulată face cu planul bazei un unghi α cu $\overline{\text{tg}}\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .Să se arate că fetele laterale opuse sunt perpendiculare.

R6.4.2. Muchia laterală a unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată face cu planul bazei un unghi α. Determinați volumul trunchiului dacă laturile bazelor sunt a,b (a>0).

Soluții: R6.4.1. tg $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ echivalent cu $\frac{h}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, unde x lungimea proiecției muchiei laterale pe planul bazei. Această proiecție este ipotenuză în triunghiul dreptunghic isoscel format cu muchia bazei mari. Deci $\sqrt{2}$ y=x. Notând cu δ unghiul feței laterale cu planul bazei obținem tg δ =1 deci δ =45.

R6.4.2. Obținem h=$\frac{(b-a)\sqrt{3}}{3}$ tgα

Bibliografie

[1] *Manual pentru clasa a X-a* – M1- MIRCEA GANGA, Editura MathPress, Ploieşti, 2000
[2] *Olimpiade şi concursuri* – ARTUR BĂLĂUCĂ, Editura Taida,Iaşi 2002
[3] *600 de probleme* – CRISTINEL MORTICI, Editura GIL-Zalău, 2001
[4] *Şi TU poţi învăţa geometria* – IOAN DANCILĂ, Editura Teora, 1993
[5] *Analogii Triunghi-Tetraedru* – MIHAI MICULITA, DAN BRÂNZEI, Editura Paralela 45, 2000
[6] *Probleme de geometrie* – GHEORGHE TITEICA, Editura Tehnică,1974.
[7] *Matematica în examene şi concursuri* – coord. DUMITRU VÂLCAN, Editura OPTILGRAPHIC, Craiova 2002.