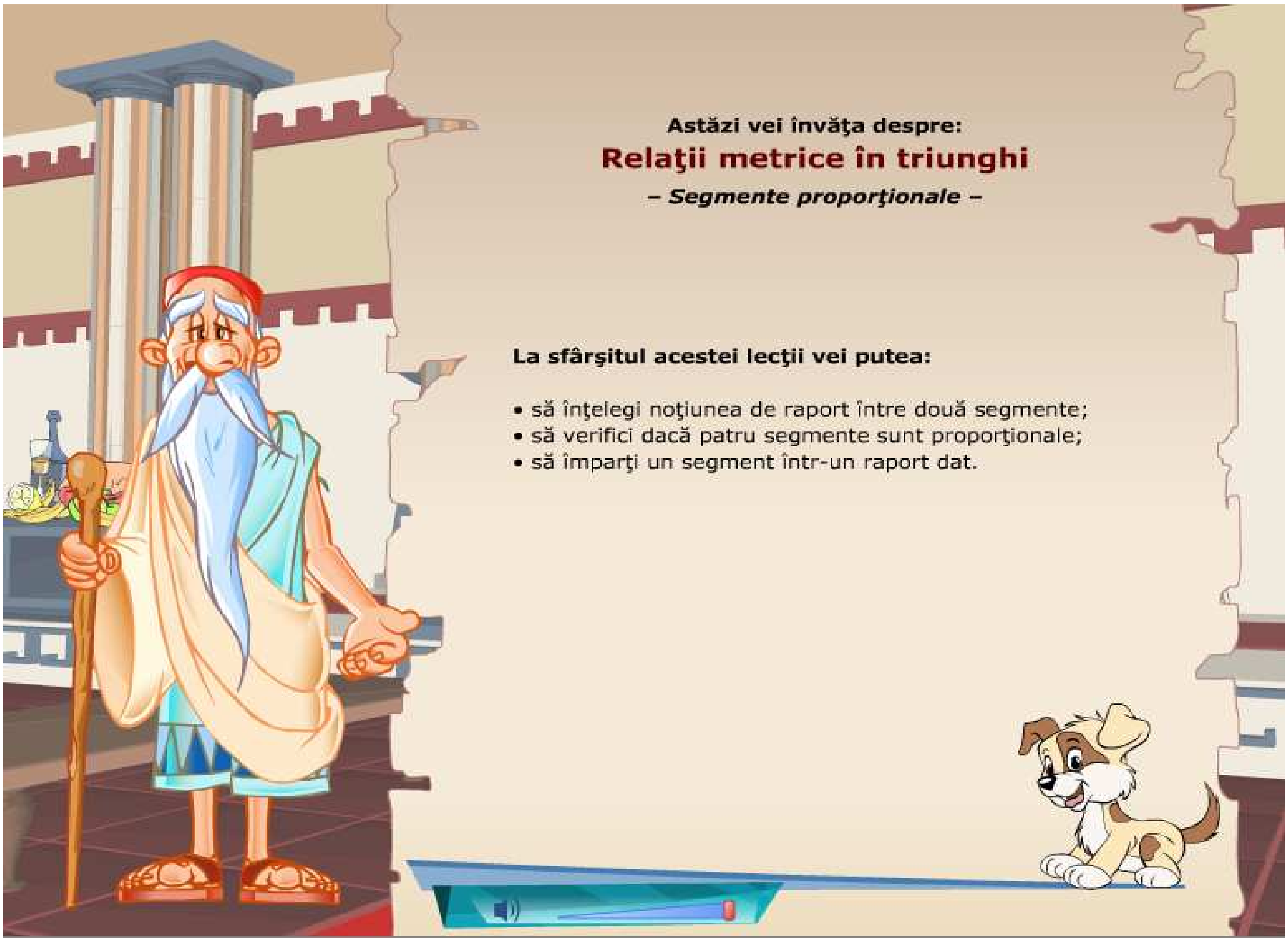
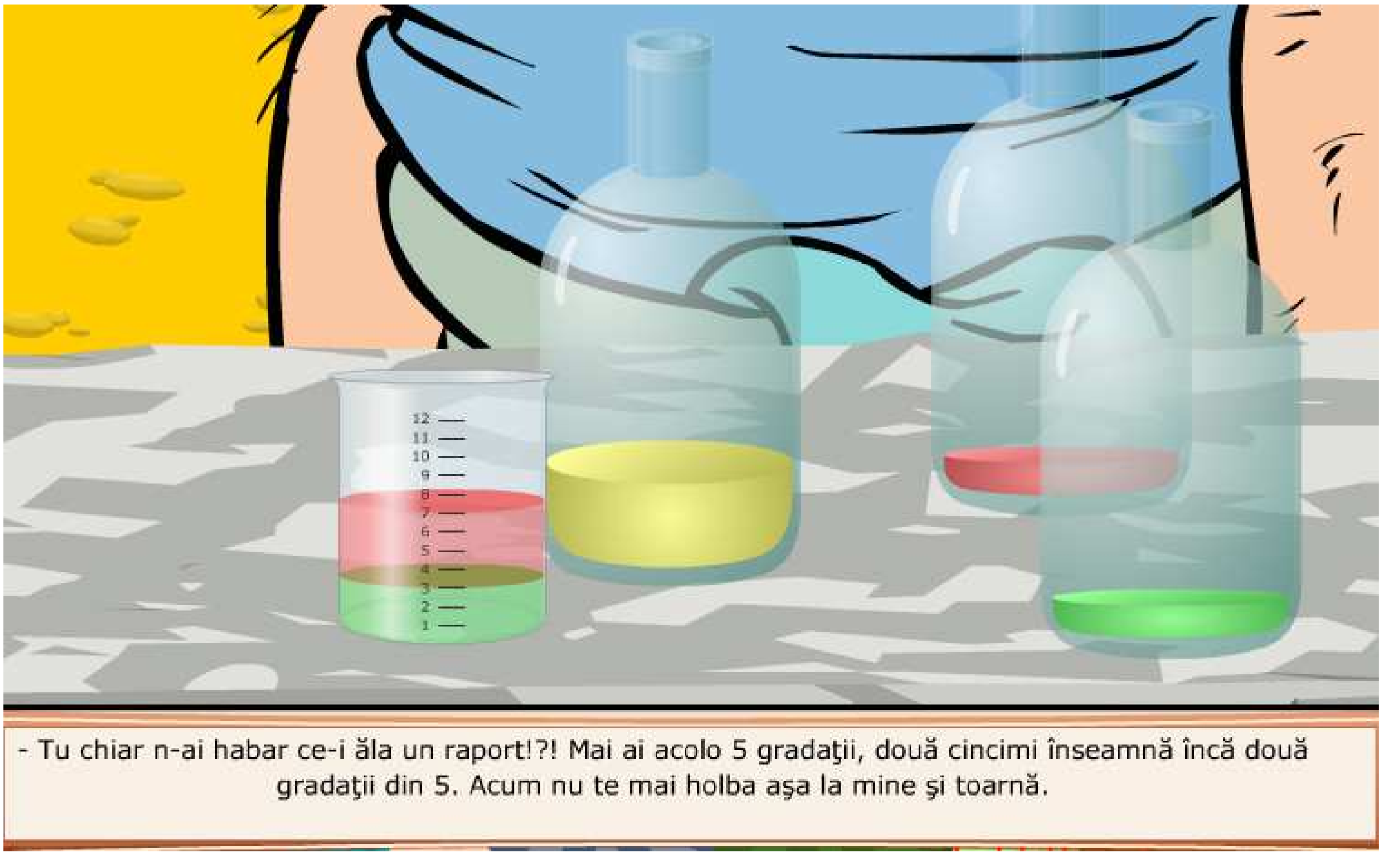
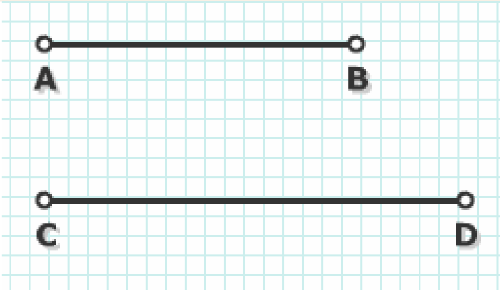

Astăzi vei învăţa despre:
Relaţii metrice în triunghi
– Segmente proporţionale –
La sfârşitul acestei lecţii vei putea:
• să înţelegi noţiunea de raport între două segmente;
• să verifici dacă patru segmente sunt proporţionale;
• să imparţi un segment într-un raport dat.


12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
- Tu chiar n-ai habar ce-i ăla un raport!?! Mai ai acolo 5 gradaţii, două cincimi înseamnă încă două gradaţii din 5. Acum nu te mai holba aşa la mine şi toarnă.

Definiţie. Prin raportul a două segmente înţelegem raportul lungimilor segmentelor exprimate cu aceeaşi unitate de măsură.

Exemplu. Dacă AB = 6 cm şi CD = 8 cm atunci raportul segmentelor AB şi CD înseamnă $\frac{AB}{CD}=\frac{6\ cm}{8\ cm}$. Putem simplifica prin 2, dar şi prin cm şi obţinem $\frac{AB}{CD}=\frac{3}{4}$.



Reţine! Din exemplul anterior trebuie reţinute următoarele:

- raportul a două segmente este un număr *(nu are unitate de măsură)*;
- dacă $\frac{AB}{CD}=\frac{a}{b}$ nu înseamnă că AB = *a* cm şi CD = *b* cm. Putem afirma însă că AB = a • k cm şi CD = b • k cm *(k este un factor de multiplicare)*.

Definiţie. Numim segmente proporţionale patru segmente cu ale căror lungimi se poate forma o proporţie.

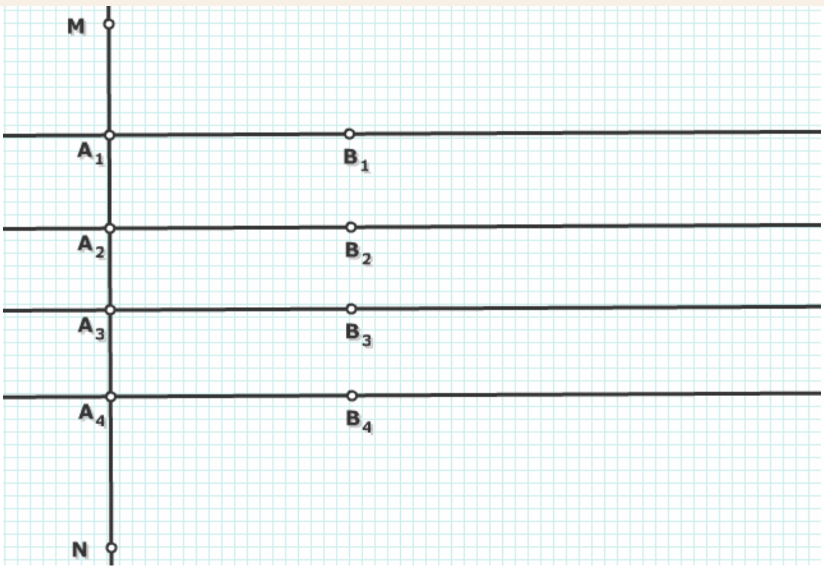
Exemplu. Fie AB = 6 cm, CD = 9 cm, MN = 3 cm şi PQ = 2 cm. Din numerele 6, 9, 3 şi 2 se poate forma proporţia $\frac{2}{6}=\frac{3}{9}$. Atunci vom putea spune că segmentele AB, CD, MN şi PQ sunt proporţionale şi vom putea scrie $\frac{PQ}{AB}=\frac{MN}{CD}$. Putem scrie şi alte proporţii. De exemplu $\frac{AB}{CD}=\frac{PQ}{MN}$.

Definiţie. Numim paralele echidistante trei sau mai multe drepte paralele cu proprietatea că distanţa dintre oricare două paralele consecutive este aceeaşi.

$A_1B_1 || A_2B_2 || A_3B_3 || A_4B_4$ şi $MN \perp A_1B_1$; $MN \perp A_2B_2$; $MN \perp A_3B_3$; $MN \perp A_4B_4$.

$\{A_1\} = MN \cap A_1B_1$; $\{A_2\} = MN \cap A_2B_2$; $\{A_3\} = MN \cap A_3B_3$; $\{A_4\} = MN \cap A_4B_4$.

Dacă $[A_1A_2] \equiv [A_2A_3] \equiv [A_3A_4]$, atunci dreptele A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 sunt paralele echidistante.



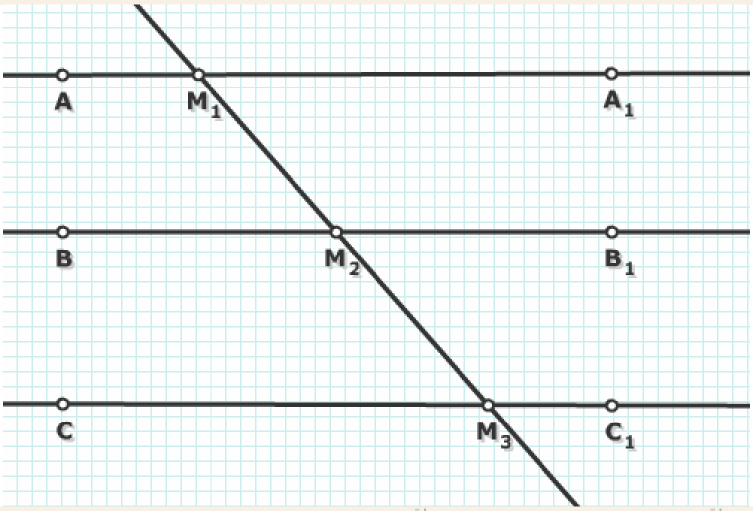
Problema 1. Fie $AA_1||BB_1||CC_1$ trei paralele echidistante şi M_1M_3 o secantă ($M_1\in(AA_1)$, $M_3\in(CC_1)$) care intersectează dreapta BB_1 în punctul M_2. Să arătăm că $[M_1M_2]\equiv[M_2M_3]$.

Ipoteză

- $AA_1||BB_1||CC_1$ echidistante
- M_1M_3 secantă

Concluzie

- $[M_1M_2]\equiv[M_2M_3]$

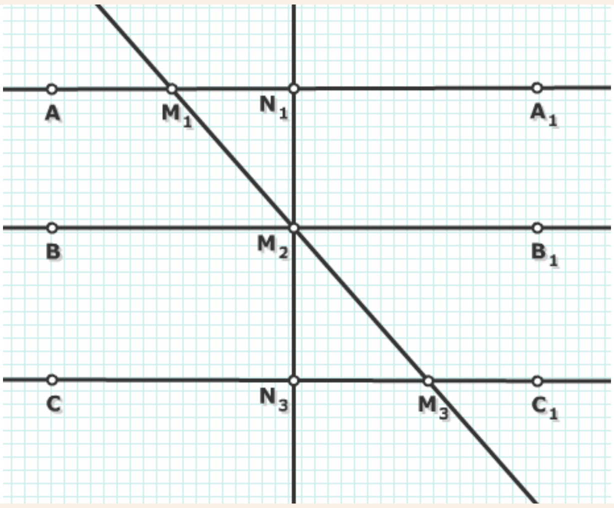


Demonstraţie. Prin punctul M_2 construim o dreaptă N_1N_3 perpendiculară pe dreptele AA_1, BB_1 şi CC_1 ($N_1\in(AA_1)$, $N_3\in(CC_1)$). În continuare vom folosi metoda triunghiurilor congruente.

În $\Delta M_1N_1M_2$ ($m(\sphericalangle N_1)=90°$) şi $\Delta M_3N_3M_2$ ($m(\sphericalangle N_3)=90°$) ştim că:

- $[N_1M_2] \equiv [M_2N_3]$ (*din definiţia paralelelor echidistante*); **(1)**
- $\sphericalangle N_1M_2M_1\equiv\sphericalangle N_3M_2M_3$ (*unghiuri opuse la vârf*); **(2)**

Din relaţiile (1) şi (2), conform cazului CU de congruenţă a triunghiurilor dreptunghice rezultă $\Delta M_1N_1M_2\equiv\Delta M_3N_3M_2$ de unde rezultă $[M_1M_2] \equiv [M_2M_3]$.



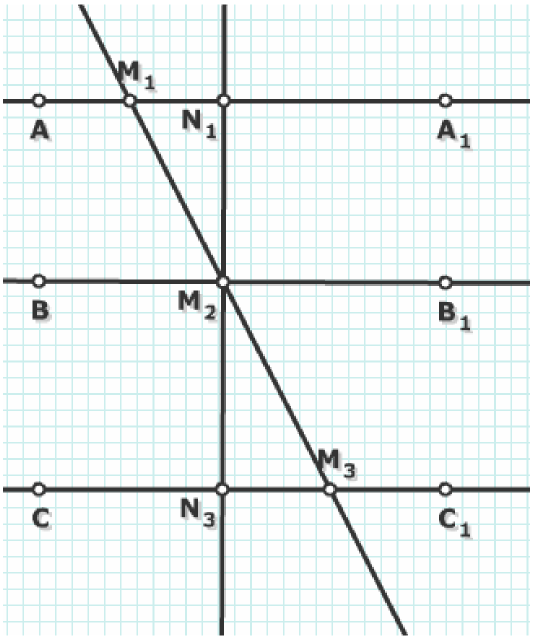
Problema 2. Fie $AA_1||BB_1||CC_1$ trei drepte paralele ca în figura de mai sus şi M_1M_3 o secantă ($M_1\in(AA_1)$ $M_3\in(CC_1)$) care intersectează dreapta BB_1 în punctul M_2. Ştiind că $[M_1M_2] \equiv [M_2M_3]$, să arătăm că dreptele AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt paralele echidistante.

Ipoteză. $AA_1||BB_1||CC_1$, M_1M_3 secantă, $[M_1M_2] \equiv [M_2M_3]$

Concluzie. AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt paralele echidistante

Demonstraţie. Prin punctul M_2 construim dreapta N_1N_3 perpendiculară pe dreptele AA_1, BB_1 şi CC_1 ($N_1 \in (AA_1)$, $N_3 \in (CC_1)$). Vom arăta că $[N_1M_2] \equiv [M_2N_3]$.
În $\Delta M_1N_1M_2$ ($m(\sphericalangle N_1)=90°$) şi $\Delta M_3N_3M_2$ ($m(\sphericalangle N_3)=90°$) ştim că:
- $[M_1M_2] \equiv [M_2M_3]$ (*din ipoteză*); **(1)**
- $\sphericalangle N_1M_2M_1 \equiv \sphericalangle N_3M_2M_3$ (*unghiuri opuse la vârf*); **(2)**

Din (1) şi (2) $\Rightarrow \Delta M_1N_1M_2 \equiv \Delta M_3N_3M_2 \Rightarrow$ $[N_1M_2] \equiv [M_2N_3]$. Segmentele N_1M_2 şi M_2N_3 reprezintă distanţele dintre două paralele consecutive, deci AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt paralele echidistante.

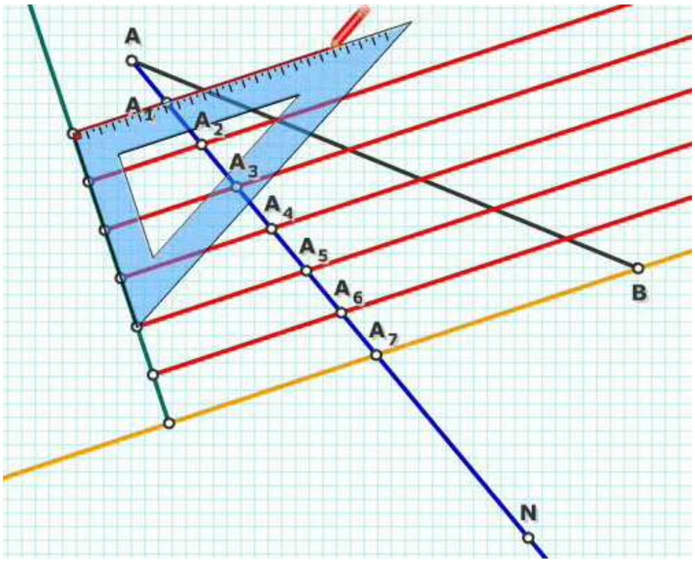


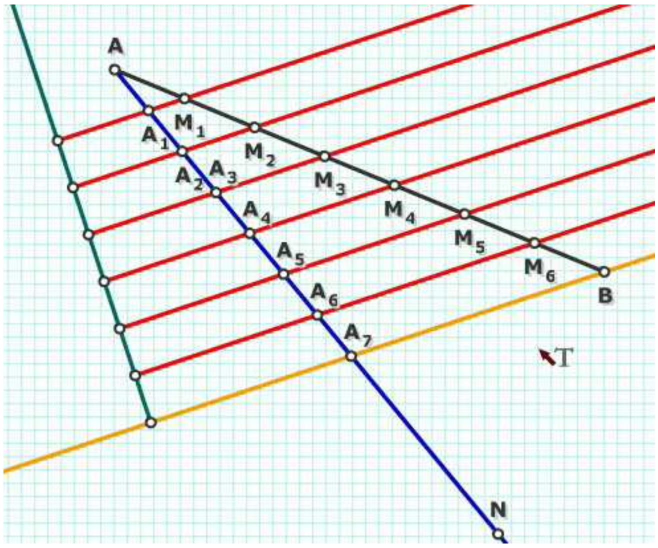
Problemele 1 şi 2 ne ajută să determinăm un punct $C \in (AB)$ pentru care $\frac{AC}{CB}=p$

Pentru o mai bună înţelegere vom lua o valoare particulară pentru *p*.

Exemplu. Vom determina punctul $C \in (AB)$ astfel încât $\frac{AC}{CB}=\frac{3}{4}$. Dacă $\frac{AC}{CB}=\frac{3}{4}$ putem spune că $AC = 3\cdot k$ şi $CB = 4\cdot k$, unde k este un factor de multiplicare. Rezultă atunci că $AB = 7\cdot k$ ($AB=AC+CB$). Vom putea să găsim punctul C , dacă reuşim să împărţim segmentul AB în 7 părţi congruente (fiecare parte va avea lungimea k).

Împărţirea unui segment în 7 segmente congruente
- construim segmentul AB şi o semidreaptă AN, unde $N \notin [AB]$;
- pe semidreapta AN construim 7 segmente congruente, fiecare de câte 2 cm ($[AA_1]\equiv[A_1A_2]\equiv[A_2A_3]\equiv[A_3A_4]\equiv[A_4A_5]\equiv[A_5A_6]\equiv[A_6A_7]$);
- unim punctul A_7 cu punctul B;
- prin punctele A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 construim paralele la dreapta BA_7 care intersectează segmentul AB în punctele M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6.





• am obţinut $A_1M_1 || A_2M_2 || A_3M_3 || A_4M_4 || A_5M_5 || A_6M_6 || A_7B$, iar segmentele determinate pe secanta AN sunt congruente; în baza problemei 2, rezultă că dreptele A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, A_4M_4, A_5M_5, A_6M_6, A_7B sunt paralele echidistante;

• în baza problemei 1, paralelele echidistante determină pe orice secantă segmente congruente, aşadar $[AM_1] \equiv [M_1M_2] \equiv [M_2M_3] \equiv [M_3M_4] \equiv [M_4M_5] \equiv [M_5M_6] \equiv [M_6B]$.

În acest moment segmentul AB a fost împărţit în 7 părţi congruente. Punctul C căutat care să împartă segmentul AB în raportul 3/4 coincide cu punctul M_3.

Observaţie. Un punct interior segmentului care împarte segmentul într-un raport dat este unic.
Exemplu. Dacă şi punctul M şi punctul N împart un segment AB în raportul 2/3 atunci punctele M şi N coincid (M=N).